

BESTIMMUNG OPTIMALER PARAMETER BEI  
WEGEWAHLMODELLEN VOM GLEICHGEWICHTSTYP  
MIT GRADIENTENVERFAHREN

von  
Rainer Müller  
aus  
Bamberg

1980







Digitized by the Internet Archive  
in 2026

BESTIMMUNG OPTIMALER PARAMETER BEI  
WEGEWAHLMODELLEN VOM GLEICHGEWICHTSTYP  
MIT GRADIENTENVERFAHREN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten  
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg  
zur  
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Rainer Müller

aus

Bamberg



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen  
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 21.5.1980

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Professor Dr. B. Dejon

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Strauß

# INHALTSVERZEICHNIS

|                   |                                                                                           |       |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| I.                | Einleitung                                                                                | Seite |
| <u>Kapitel I</u>  | Parameterabhängige Gleichgewichte in Transportnetzwerken                                  | 1     |
| I.1               | Grundlegende Begriffe und Beziehungen                                                     | 1     |
| I.2               | Charakterisierung von Gleichgewichten durch Gleichungen und Optimierungsaufgaben          | 17    |
| I.3               | Existenz von Gleichgewichten und Verhalten bei Variation des Streuparameters $\sigma$     | 25    |
| I.4               | Zusammenhang von Gleichgewichten in $G(W,G)$ und $G(W,P)$                                 | 32    |
| I.5               | Bestimmung optimaler Parameter in Transportnetzwerken                                     | 36    |
| I.6               | Zu Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Parameter                          | 41    |
| <u>Kapitel II</u> | Numerische Methoden zur Berechnung optimaler Parameter in Transportnetzwerken             | 47    |
| II.1              | Gleichgewichtsalgorithmen                                                                 | 49    |
| II.1.1            | Klassifikation der Gleichgewichtsalgorithmen                                              | 50    |
| II.1.2            | Drei weitere Gleichgewichtsalgorithmen                                                    | 56    |
| II.1.3            | Gegenüberstellung der Gleichgewichtsalgorithmen für $\sigma > 0$                          | 63    |
| II.2              | Bestimmung des Gradienten $\frac{d}{d\alpha} Z(F(\alpha), \alpha)$                        | 72    |
| II.2.1            | Direkte Berechnung von $\frac{df}{d\alpha}$                                               | 73    |
| II.2.2            | Berechnung von $\frac{dF}{d\alpha}$ mit anschließende Bestimmung von $\frac{df}{d\alpha}$ | 77    |
| II.2.3            | Aufwandsvergleich der vorgeschlagenen Methoden                                            | 80    |
| II.3              | Ein Algorithmus zur Lösung von $\hat{P}(\theta)$                                          | 87    |
| II.3.1            | Konvergenzsätze                                                                           | 88    |
| II.3.2            | Ein grundlegender Algorithmus                                                             | 93    |

|                                                                             | Seite |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------|
| <u>Kapitel III</u> Anwendungen und Ergebnisse                               | 95    |
| III.1    Kalibrieren von Parametern                                         | 97    |
| III.1.1 Problemformulierung                                                 | 97    |
| III.1.2 Dimensionsreduktion                                                 | 98    |
| III.1.3 Ein durchführbarer Algorithmus zur Parameter-<br>kalibrierung       | 106   |
| III.1.4 Ergebnisse der Kalibrierung                                         | 108   |
| III.2    Gleichgewichtsalgorithmen bei unsymmetrischer<br>Jacobimatrix      | 111   |
| III.2.1 Problemformulierung                                                 | 111   |
| III.2.2 Diskussion des Fixpunktansatzes                                     | 112   |
| III.2.3 Algorithmen                                                         | 116   |
| III.2.4 Ergebnisse und Vergleich verschiedener<br>Gleichgewichtsalgorithmen | 123   |
| III.3    Korrektur und Fortschreibung der Fahrtenmatrix                     | 129   |
| III.3.1 Problemformulierung                                                 | 129   |
| III.3.2 Vereinfachte Berechnung der auftretenden<br>Gradienten              | 130   |
| III.3.3 Ein Algorithmus zur Korrektur der Quell-<br>und Zielstärken         | 137   |
| III.3.4 Ergebnisse der Matrixanpassung                                      | 140   |
| <u>IV. Anhang</u>                                                           |       |
| IV.1    Kurzbeschreibung der Testdaten der Stadt<br>Erlangen                | 141   |
| IV.2    Literaturverzeichnis                                                | 146   |
| IV.3    Schreibweisen und Bezeichnungen                                     | 152   |
| IV.4    Liste häufig verwendeter Symbole                                    | 153   |

## EINLEITUNG

Verkehrsplanung als Prozeß optimaler Entscheidungsfindung benötigt heute mehr denn je zuverlässige Instrumente zur Simulation von zum Teil kostspieligen Ausbauvarianten vorhandener Verkehrsnetze. Zur Unterstützung der verantwortlichen Planungsgremien wurden in den vergangenen 15 - 20 Jahren immer weiter verfeinerte Planungsmodelle für den Computereinsatz entwickelt (siehe u.a. BRAUN und WERMUTH [40] oder MÄCKE [48]). Von besonderem Interesse ist dabei die modellmäßige Nachbildung der Netzbelastung in Verkehrswegewahlmodellen. In letzter Zeit gewannen die sog. Gleichgewichtswegewahlmodelle gegenüber den bisher in der Planungspraxis angewandten Methoden immer mehr an Bedeutung. Grundlegend für diese neueren Ansätze ist das 1. Wardrop'sche Prinzip (WARDROP 1952 [11]). Es postuliert eine Aufteilung des Verkehrs auf die zur Verfügung stehenden Wege zwischen Quelle und Ziel derart, daß belegte Wege kürzeste Wege sind. Netzzustände dieser Art nennen wir Verkehrsgleichgewichte. Wie in Abschnitt III.2.4 anhand empirischer Ergebnisse gezeigt wird, spricht einiges für die Annahme, daß der Wegewahlprozeß in der Realität zu einer solchen Aufteilung führt. Arbeiten, die sich mit Gleichgewichten in Netzwerken und deren numerischer Berechnung befassen, stammen u.a. von BRAESS [1][2], BRUYNNOOGHE et al. [3], DAFERMOS [4][5][6], LEBLANC et al. [7], LEVENTHAL et al. [8], NGUYEN [9], PETERSEN [10], WILKIE und STEFANEK [12], sofern konstante Nachfragebeziehungen zwischen den einzelnen Quellen und Zielen zugrunde liegen.

Darüber hinaus gibt es eine Reihe von Veröffentlichungen, die den Gleichgewichtsgedanken weiterführen, z.B. durch Berücksichtigung

elastischer Nachfragen [13][21][28][29][33], durch Integration weiterer Planungsmodellphasen (Verkehrserzeugung, Modal Split, Verteilung) [17][18][22][24][25][35][32], durch Anwendung auf Probleme des Netzentwurfs [34] oder der Tarifbildung [15][29][38] oder durch Untersuchung spezieller Aspekte der Gleichgewichtstheorie [14][16][19][20][23][27][36][37].

Wir beschäftigen uns hier mit Gleichgewichtsmodellen bei fest vorgegebener Nachfrage. Üblicherweise beruhen Verfahren zur Bestimmung solcher Gleichgewichte auf der Lösung eines sog. assoziierten Optimierungsproblems

$$(O) \quad \min_{F \in \mathcal{F}} S(F),$$

wobei  $\mathcal{F}$  den zulässigen Bereich (der Flüsse) bezeichnet.

Die zugehörigen Kuhn-Tucker-Bedingungen, die gleichzeitig auch den Gleichgewichtsbedingungen entsprechen, schreiben wir im folgenden in der Form:

$$(KT) \quad \begin{array}{l} *) \\ F \cdot d(F, \lambda, \alpha) = 0, \quad d(F, \lambda, \alpha) \geq 0, \quad F \geq 0, \quad F \in \mathcal{F} \end{array}$$

mit den Lagrangemultiplikatoren  $\lambda$ , dem Nullvektor  $\theta$  und dem Parameter  $\alpha$  aus einer Parametermenge  $A$ ; zu jedem  $\alpha \in A$  ist durch (KT) eine Gleichgewichtsmenge  $G(\alpha)$  definiert. Die Gleichgewichtsbedingungen (KT) werden in der Literatur, je nach Autor, entweder in der Weg-Bogenformulierung (z.B. [3][4][5]) oder in der Knoten-Bogenformulierung (z.B. [1][2][9]) angegeben. Diese Arbeit behandelt aufgrund eines etwas allgemeineren netzwerktheoretischen Zugangs beide Darstellungsmöglichkeiten durch einen einzigen Ansatz.

\*) pro Komponente  $p$  gilt:  $F_p \cdot d_p(F, \lambda, \alpha) = 0$

Ein bisher kaum untersuchtes Problem ist die Frage, wie die in die Gleichgewichtsbedingungen (KT) eingehenden Parameter  $\alpha \in A$  im Sinne eines festzulegenden Gütekriteriums "optimal" zu ermitteln sind, d.h. wie werden Optimierungsprobleme vom Typ

$$(P) \quad \min_{(F, \alpha)} Z(F, \alpha) \\ \text{Fe } g(\alpha) \\ \alpha \in A$$

gelöst, wobei  $Z$  eine Güte- oder Zielfunktion ist? Versucht man, empirisch gewonnene Meßwerte gemäß der Vorschrift (P) möglichst gut zu approximieren, so nennt man das Lösen von (P) auch Kalibrieren oder Eichen des Gleichgewichtswegwahlmodelles. Obwohl FLORIAN und NGUYEN [23] sogar behaupten: "...an equilibrium assignment model cannot be calibrated", werden in dieser Arbeit einige Wege aufgezeigt, die zumindest zu lokalen Lösungen von (P) führen.

Ein wesentlicher Bestandteil des hier diskutierten Ansatzes liegt in der Charakterisierung von  $g(\alpha)$  durch ein nicht lineares Gleichungssystem  $G(F, \alpha) = \theta$ . Durch Addition eines "Regularisierungsterms"  $\sigma \ln F_p$ , mit  $\sigma > 0$ , zu jeder Komponente  $p$  von  $d$ , also  $d_p(F, \lambda, \alpha)$ , werden die Bedingungen (KT) in die Gestalt der Gleichung (ohne Ungleichungen) (KT\*)

$$d^*(F, \lambda, \alpha; \sigma) = \theta, \text{ Fe } F \text{ (} F > 0 \text{)}$$

gebracht. Hierdurch wird die Differenzierbarkeit der Lösungen  $F$  von (KT\*) nach den Parametern  $\alpha$  gesichert. Im übrigen läßt sich zeigen, daß für  $\sigma \rightarrow 0$  die Lösungen von (KT\*) gegen ein Gleichgewicht konvergieren, das (KT) erfüllt (vgl. Abschnitt I.3). Erfahrungen zeigen jedoch, daß für  $\sigma > 0$  sogar bessere Ergebnisse (gemessen an empirisch gewonnenen Vergleichsdaten) erzielt werden als für  $\sigma = 0$  (vgl. Abschnitt III.2.4).

Zusammen mit den linearen Restriktionen zur Charakterisierung von  $\mathcal{F}$  liefert  $d^*(F, \lambda, \alpha; \sigma) = 0$  in  $(KT^*)$  das Gleichungssystem  $G(F, \alpha) = 0$ .

Somit lautet (P) nun:

$$(P^*) \quad \begin{array}{ll} \min_{(F, \alpha)} & Z(F, \alpha) \\ & G(F, \alpha) = 0 \\ & \alpha \in A \end{array}$$

Da die eingeführte Regularisierung unter schwachen Voraussetzungen sicherstellt, daß  $\frac{\partial G}{\partial F}$  in allen Punkten aus  $\mathcal{F} \times A$  invertierbar ist, läßt sich das Problem  $(P^*)$  mit Hilfe eines Satzes über implizite Funktionen auch in folgender Form schreiben:

$$(\hat{P}) \quad \min_{\alpha \in A} Z(F(\alpha), \alpha)$$

wobei  $F(\alpha)$  die Gleichgewichte in Abhängigkeit von  $\alpha \in A$  beschreibt, d.h. es gilt  $G(F(\alpha), \alpha) = 0$ .

$(P^*)$  und  $(\hat{P})$  sind i.a. nicht-konvexe Optimierungsaufgaben, zu deren Lösung die mathematische Optimierungstheorie eine Reihe von Algorithmen bereitstellt. Bei der Auswahl eines geeigneten Verfahrens sind jedoch unbedingt folgende Punkte zu beachten:

1. (Dimension) Die Anzahl der Zustandsvariablen  $F \in \mathcal{F}$  ist in realen Netzen sehr groß, etwa 20.000 - 100.000. Ebenso die Dimension des nichtlinearen Gleichungssystems  $G(F, \alpha) = 0$ .
2. (Rechenzeit) Die Berechnung von Gleichgewichten  $\hat{F} \in \hat{\mathcal{G}}(\hat{\alpha})$ , d.h. die Lösung von  $G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = 0$  bei festem  $\hat{\alpha} \in A$ , ist mit allen bekannten Algorithmen zeitaufwendig.

3. (Abbruchfähigkeit) Bei den zu erwartenden hohen Rechenzeiten zur Lösung von  $(P^*)$  bzw.  $(\hat{P})$  sollten alle errechneten Zwischenzustände  $F(\alpha)$ , verglichen mit dem Startwert  $F(\alpha^0)$ , zumindest zulässig und suboptimal sein, d.h.  $F(\alpha) \in \mathcal{F}$  und  $Z(F(\alpha), \alpha) < Z(F(\alpha^0), \alpha^0)$ . Ein Verfahren sollte also bei Abbruch an einer beliebigen Stelle ein zulässiges  $F(\alpha)$  und ein besseres  $\alpha \in A$  liefern.
4. (Fehlereinfluß) Aufgrund vielseitiger Fehlerquellen genügt es in der Praxis häufig, nur grobe Näherungen des optimalen Parameters zu berechnen.

Diese vier Aspekte legen es - nach Meinung des Verfassers - nahe, Methoden zur Lösung des Problems  $(\hat{P})$  mit dem einfachsten aller Abstiegsverfahren, dem Gradientenverfahren zu untersuchen. Insbesondere sei bemerkt, daß sich durch Kenntnis des Gradienten eine ganze Klasse möglicher Optimierungsverfahren erschließt, etwa das Newtonverfahren, das Verfahren von Davidon-Fletcher-Powell oder das Verfahren der zulässigen Richtungen oder projizierten Gradienten bei Anwesenheit von Restriktionen für  $\alpha$  (siehe z.B. BLUM/OETTLI [55] oder ZANGWILL [72]). Außerdem sei im Hinblick auf Punkt 4 darauf hingewiesen, daß gerade das Gradientenverfahren in den ersten Iterationsschritten häufig sehr effizient arbeitet.

Exemplarisch soll anhand einiger bekannter Optimierungsverfahren - mehr oder weniger skizzenhaft - gezeigt werden, weshalb in dieser Arbeit zur Lösung von  $(\hat{P})$  zunächst das Gradientenverfahren gewählt wurde. So sind z.B. alle ableitungsfreien Verfahren, die auf Such- oder Abtasttechniken beruhen, wegen der vielen, oft auch

unmotivierten  $F(\alpha)$ -Berechnungen, selbst bei nur einem Parameter, weniger erfolgversprechend (Punkt 2. und 3.). Methoden zur Lösung von  $(P^*)$ , wie etwa die Verfahren der zulässigen Richtungen oder der projizierten Gradienten (ZANGWILL [72], LUENBERGER [67]) sind aus Dimensionsgründen und insbesondere dann, wenn nichtlineare Gleichungsrestriktionen vorliegen, zu aufwendig. Auch die Anwendung von Straffunktionsmethoden (SUMT, siehe FIACCO und MCCORMICK [62]) scheiden bei den hier vorliegenden Dimensionen von  $G(F, \alpha) = \theta$  aus. Außerdem liefern SUMT-Techniken keine zulässigen Zwischenergebnisse und verstoßen somit gegen die 3. Forderung. Das von GEOFFRION [65] vorgeschlagene verallgemeinerte Benders'sche Dekompositionsverfahren ließe sich ebenfalls auf  $(P^*)$  anwenden. Doch Dimensionsüberlegungen und Probleme bei der Berechnung der dort auftretenden Funktionen geben den Anlaß, auch diese Methode auszuschneiden. Zur Lösung von  $(\hat{P})$  wurden bereits weiter oben einige "verfeinerte" Gradientenmethoden erwähnt. Aber auch sie sollten aus Dimensionsüberlegungen nicht in die engere Wahl gezogen werden. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß mittels der oben erwähnten Methoden i.a. nur lokale Minima berechnet werden können. Methoden zur Bestimmung globaler Optima, wie sie z.B. in DIXON/SZEGÖ [60] erörtert werden, sind bei dem hier vorliegenden Problem viel zu aufwendig. Wie jedoch in I.6 gezeigt wird, gibt es in günstigen Fällen nur ein lokales (und damit globales) Minimum.

Zur Lösung von (P) mittels eines Gradientenverfahrens muß also

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{dF}{d\alpha} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$$

bestimmt werden. Der größte Rechenaufwand entsteht dabei bei der Berechnung der Ableitung  $\frac{dF}{d\alpha}$  der durch  $G(F, \alpha) = 0$  implizit definierten Abbildung  $F(\alpha)$  und bei der Funktionsauswertung von  $F(\alpha)$ , also der Gleichgewichtsbestimmung. In Kapitel II werden deshalb eine Reihe numerischer Methoden zur Lösung dieser Probleme untersucht.

Abschnitt II.1 beschäftigt sich mit Verfahren zur Bestimmung von Gleichgewichten  $F(\alpha)$  bei vorgegebenem  $\alpha \in A$ . Neben den bisher bekannten Gleichgewichtsalgorithmen (auf der Basis der Verfahren der zulässigen Richtungen) werden drei weitere - bisher noch nicht untersuchte Ansätze - vorgestellt, die sich besonders im Fall  $\sigma > 0$  gut anwenden lassen. Anschließend werden alle Verfahren anhand von Abschätzungen für den Rechenaufwand einander gegenübergestellt.

Abschnitt II.2 untersucht drei Verfahren zur Berechnung der Ableitung  $\frac{dF}{d\alpha}$ . Zwei dieser Verfahren werden aus den Überlegungen des Abschnitts II.1 abgeleitet, da die Bestimmung von  $\frac{dF}{d\alpha}$  äquivalent zur Lösung eines linearen Gleichgewichtsproblems ist. Der andere Ansatz, der auf Überlegungen des Verfassers beruht, benutzt die Tatsachen, daß i.a. in der Zielfunktion  $Z$  die Zustandsvariablen  $F$  (die Wegflüsse) nur als Faktor des Produktes  $\Delta F = f^{(*)}$  ( $f$  sind die Bogenflüsse) vorkommt.

\*)  $\Delta$  = Weg-Bogen-Inzidenzmatrix

Deshalb kann man statt  $\frac{dF}{d\alpha}$  auch sofort  $\frac{df}{d\alpha}$  bestimmen. Die Berechnung von  $\frac{df}{d\alpha}$  kann über ein lineares Gleichungssystem stark herabgesetzter Ordnung (gleich Anzahl der Bogen des Graphen) erfolgen. Anschließend werden die einzelnen Verfahren diskutiert und bezüglich der erforderlichen Rechenzeit untersucht.

Insgesamt geben die Abschnitte II.1 und II.2 Entscheidungshilfen für die Auswahl von Gleichgewichtsalgorithmen und Verfahren zur Bestimmung von  $\frac{dF}{d\alpha}$  bzw.  $\frac{df}{d\alpha}$ . Die wesentlichen Elemente eines Verfahrens zur Lösung von  $(\hat{P})$ , nämlich die Berechnung von Gleichgewichten  $F(\alpha) \in \mathcal{G}(\alpha)$  bei festem  $\alpha \in A$  und die Bestimmung "besserer Parameter"  $\alpha'$  mit

$$Z(F(\alpha'), \alpha') < Z(F(\alpha), \alpha),$$

sind somit bereitgestellt. Wie diese Elemente sinnvoll zu kombinieren sind, zeigt Abschnitt II.3. Es ist nämlich zu beachten, daß beim Lösen von  $(\hat{P})$  aufeinanderfolgende Iterationspunkte, etwa  $F(\alpha^{(i)})$  und  $F(\alpha^{(i+1)})$ , unter Umständen erheblich voneinander abweichen können und somit der eben erst unter hohem Aufwand bestimmte Punkt  $F(\alpha^{(i)})$  hinfällig würde. Deshalb wurde in Abschnitt II.3 ein Algorithmus konzipiert, der im Verlauf der Parameteroptimierung sukzessive immer "bessere" approximative Gleichgewichtszustände berechnet.

Die Lösungsverfahren der Anwendungsbeispiele des Kapitels III beruhen auf der Konzeption dieses Algorithmus. Die dort angegebenen Verfahren wurden jedoch so modifiziert und durch vereinfachende Annahmen ergänzt, daß eine praktikable Berechnung von  $\frac{dF}{d\alpha}$  bei verschiedenen Parametertypen möglich ist.

Abschnitt III.1 behandelt das "klassische" Kalibrierungsproblem, wobei versucht wird, die auftretenden Gleichungssysteme durch Auswahl eines "repräsentativen" Teilsystems in der Dimension weiter zu reduzieren.

Abschnitt III.2 behandelt die - bisher in der Literatur kaum \*) untersuchte - Frage, wie Gleichgewichte, zu denen kein assoziiertes Optimierungsproblem (O) existiert (das ist dann der Fall, wenn die Jacobimatrix der eingehenden Kostenfunktionen nicht symmetrisch ist), zu bestimmen sind. Situationen dieser Art treten häufig in der Praxis auf, wenn man z.B. die Beeinflussung des nicht-bevorrechtigten Verkehrs durch den bevorrechtigten Verkehr an Kreuzungen berücksichtigen will.

Abschnitt III.3 widmet sich der Frage, wie man aufgrund von Verkehrszählungen die oft stark fehlerbehaftete Matrix der Nachfragebeziehungen korrigieren kann. Das angegebene Verfahren eignet sich auch zur kurzfristigen Fortschreibung der Nachfragebeziehungen.

Alle in Kapitel III vorgestellten Verfahren wurden an einem Rechner implementiert und auf Daten der Stadt Erlangen angewandt. Die empirischen Ergebnisse sind im einzelnen in den Absätzen III.1.4, III.2.4 und III.3.4 nachzulesen. Dort finden sich u.a. ein Vergleich der Gleichgewichtsalgorithmen von DAFERMOS [5], NGUYEN [9] und der beiden hier vorgestellten Methoden sowie Untersuchungen über das Verhalten der Gleichgewichtsalgorithmen bei Variation des Parameters  $\sigma$  und auch ein Kalibrierungsergebnis, das Aufschluß über das Verhalten der Benutzer bei belastetem Netz gibt.

\*) Im Jahr 1979 erschienen die Arbeiten von BRAESS/KOCH [73] und FISK/NGUYEN [74], die Gleichgewichte mit unsymmetrischen Jacobimatrizen im Zusammenhang mit mehreren Benutzerklassen untersuchten. Bereits 1970 erschien die Arbeit von NETTER/SENDER [29], die u.a. ähnlich wie in [73] nur allgemeine Existenzaussagen über Gleichgewichte ohne Bestimmungsalgorithmen angibt.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß sich in Abschnitt IV.3 eine Erläuterung von Schreibweisen und Bezeichnungen befindet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei der Stadt Erlangen, insbesondere bei berufsmäßigem Stadtrat W. Böhlk, Dipl.-Ing. J. Nöske und Dipl.-Ing. K.J. Wolf für die Unterstützung bei der Datenerfassung und -aufbereitung bedanken. Herrn Dipl.-Math. W. Schneider danke ich für die Programmierung des Algorithmus von NGUYEN. Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. B. Dejon, der mir bei vielen Gesprächen äußerst nützliche Hinweise für die Erstellung dieser Arbeit gab. Frau H. Bayerschmidt danke ich für die sorgfältige Niederschrift des Manuskriptes.

# Kapitel I Parameterabhängige Gleichgewichte in Transportnetzwerken

Gleichgewichtsmodelle für die Verkehrswegewahl lassen sich mit den Methoden der mathematischen Netzwerktheorie, die u.a. auf Ergebnisse der Graphentheorie, der konvexen Analysis und der Optimierungstheorie aufbaut, behandeln. Grundlegende Untersuchungen auf diesem Gebiet stammen z.B. von BERGE und GHOUILA-HOURI [53], FORD und FULKERSON [64], IRI [66], sowie von POTTS und OLIVER [69]. Die für die in dieser Arbeit teilweise speziellen Problemformulierungen nötigen Hilfsmittel werden im folgenden zusammengestellt.

## I.1 Grundlegende Begriffe und Beziehungen

Die Basis des weiteren Vorgehens bilden einige Definitionen und Aussagen der Graphentheorie.

### (I.1.1) DEFINITION:

Ein (gerichteter, schlingenfreier) Graph  $G = (K, B)$  besteht aus einer Menge  $K$ , der sog. Knotenmenge, und aus einer Menge  $B$ , der sog. Bogenmenge, sowie einer sog.  $(|K| \times |B|)$ -Knoten-Bogen-Inzidenzmatrix  $\Gamma$  mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes  $b \in B$  gibt es genau ein  $i \in K$  (den sog. Anfangsknoten) mit  $\Gamma_{ib} = +1$  und genau ein  $j \in K$  (den sog. Endknoten) mit  $\Gamma_{jb} = -1$ . Für alle übrigen  $k \in K$  ist  $\Gamma_{kb} = \emptyset$ .

Weiterhin benötigen wir folgende Bezeichnungen

(I.1.2)  $(k, k') := \{a \in B \mid \Gamma_{ka} = 1 \text{ und } \Gamma_{k'a} = -1\}$  für  $k, k' \in K$  und

(I.1.3)  $\omega^+(k) := \omega_G^+(k) := \{a \in B \mid a \in (k, k'), k' \in K\}$  und

(I.1.4)  $\omega^-(k) := \omega_G^-(k) := \{a \in B \mid a \in (k', k), k' \in K\}$ .

Wenn wir im folgenden von einem Graphen sprechen, dann sei dieser immer gerichtet und schlingenfrei.

(I.1.5) DEFINITION:

Sei  $G = (K, B)$  ein Graph und seien  $s, t \in K$ . Eine Kette ist eine Folge paarweise verschiedener Bogen  $(b_i)_{1 \leq i \leq n} \subset B$ , so daß für alle  $1 < i \leq n$  die Bögen  $b_i \in (a_i, e_i)$  über einem ihrer Knoten  $a_i$  bzw.  $e_i$  mit dem Bogen  $b_{i-1}$  und über den anderen Knoten mit dem Bogen  $b_{i+1}$  benachbart sind.

Ein Weg von  $s$  nach  $t$  ist eine Kette mit Bogen  $b_i \in (a_i, e_i)$ , so daß für  $1 \leq i \leq n$  gilt:  $a_i = e_{i-1}$ , ferner  $a_1 = s$  und  $e_n = t$ .

Die Menge aller Wege von  $s$  nach  $t$  bezeichnen wir mit  $P_{st}$ .

Sind  $O, D \in K$  und  $W = O \times D$ , dann ist  $P_W := \bigcup_{w \in W} P_w$ , die Menge aller Wege von einem Knoten  $s \in O$  nach einem Knoten  $t \in D$ .

Ist  $p \in P_{st}$  mit  $p = (b_1, \dots, b_n)$  und  $a \in B$ , dann bedeutet  $a \in p$ , daß es  $1 \leq i \leq n$  gibt, so daß  $a = b_i$ .

Ein elementarer Zyklus ist eine Kette  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,

so daß  $b_1$  und  $b_n$  benachbart sind und

beim Durchlaufen der Kette derselbe Knoten nur einmal (ausgenommen Anfangs- und Endknoten) angetroffen wird.

Der Indikator eines elementaren Zyklus ist ein Vektor  $z \in \mathbb{R}^B$  mit den Komponenten

$$z_a = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a \text{ im Umlaufsinn des Zyklus gerichtet ist.} \\ -1, & \text{wenn } a \text{ gegen den Umlaufsinn des Zyklus gerichtet ist.} \\ 0, & \text{wenn } a \text{ im Zyklus nicht vorkommt.} \end{cases}$$

(I.1.6) BEMERKUNG:

Für jeden Indikator eines elementaren Zyklus  $z \in \mathbb{R}^B$  gilt:

$$\Gamma z = 0,$$

d.h.  $z \in \text{Ker } \Gamma$ . Es gilt sogar:

Die Menge der Indikatoren von elementaren Zyklen spannt  $\text{Ker } \Gamma$  auf. Siehe hierzu z.B. BERGE/GHOUILA-HOURI [5], Abschn. 7.2.

(1.1.7) DEFINITION:

Mit  $\Theta$  oder  $\Theta(G)$  bezeichnen wir stets eine Matrix, deren Spalten Indikatoren elementarer Zyklen sind und eine Basis in  $\text{Ker } \Gamma$  bilden.  $\Theta$  nennen wir dann eine Zykelmatrix (zu  $G$ ). Außerdem bezeichne  $\hat{\Gamma}$  eine Basis der Zeilen von  $\Gamma$ .

Es gilt dann:  $\text{Ker } \hat{\Gamma} = \text{Ker } \Gamma = \text{Im } \Theta$  und  $\hat{\Gamma}\Theta = O$ , wobei  $O$  die  $(\text{Rg } \Gamma \times \text{Def } \Gamma)$ -Nullmatrix bezeichnet.

(I.1.8) SATZ:

$A$  sei eine positiv definite  $(|B| \times |B|)$ -Matrix.

Dann ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} \Theta^t A \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix}$$

quadratisch und regulär.

(I.1.9) DEFINITION:

Sei  $G = (K, B)$  ein Graph und sei  $s \in K$ . Sei  $P \subset P_W$ , so daß für alle  $(s, t) \in W$  gilt:  $P_{st} \cap P \neq \emptyset$ .

$(\alpha(s))$  ist ein Teilgraph  $(K(s), B(s))$  von  $G$  derart, daß

$K(s) := \{k \in K \mid \exists t \in D, \text{ so daß ein } p \in P_{st} \cap P \text{ den Knoten } k \text{ durchläuft}\}$ ,

$B(s) := \{b \in B \mid \exists t \in D, \text{ so daß für ein } p \in P_{st} \cap P \text{ gilt: } b \in p\}$ .

$G(s)$  nennen wir Erreichbarkeitskomponente zu  $(s, P)$ .

$K(s)$  bzw.  $B(s)$  sind also diejenigen Knoten bzw. Bogen, die auf einem Weg der Teilmenge  $P$  von  $s$  in die "Zielmenge"  $D$  liegen. Diese Eigenschaft kommt im Zusammenhang mit den in (I.1.31) eingeführten Kostenfunktionen mit  $\ln$ -Term zum Tragen.

Im Sinne des aus der Graphentheorie bekannten Zusammenhangsbegriffes für Graphen ist jede Erreichbarkeitskomponente (zu  $s, P$ ) zusammenhängend. Es gilt deshalb der aus der Graphentheorie bekannte folgende Satz (vgl. BERGE/GHOUILA-HOURI [53], Satz 1, S. 128):

(I.1.10) SATZ:

Sei  $G(s) = (K(s), B(s))$  eine Erreichbarkeitskomponente zu  $(s, P)$  und  $\Gamma(s)$  die zugehörige Knoten-Bogen-Inzidenzmatrix. Dann gilt:

$$\text{Def } \Gamma^t(s) = 1 \text{ und}$$

$$\text{Rg } \Gamma^t(s) = |K(s)| - 1.$$

(I.1.11) DEFINITION:

Sei  $G = (K, B)$  ein Graph und seien  $O, D \in K$  und  $P \in P_W$ . Außerdem sei  $s \in O$ .

Der Graph  $G(O) := (K(O), B(O))$  heißt Erreichbarkeitsgraph zu  $(O, P)$ , wenn  $G(O)$  aus  $|O|$  Zusammenhangskomponenten besteht, so daß die  $s$ -te Zusammenhangskomponente isomorph zu  $G(s)$  ist.

Wir setzen:  $\Gamma(s) := \Gamma(G(s))$ ,  $\Gamma(O) := \Gamma(G(O))$ ,  
 $\Theta(s) := \Theta(G(s))$  und  $\Theta(O) := \Theta(G(O))$ .

(I.1.12) BEMERKUNG:

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\Gamma(O) = \text{diag}(\Gamma(s))_{s \in O} \text{ und } \Theta(O) = \text{diag}(\Theta(s))_{s \in O}.$$

Für die weiteren Untersuchungen ist es von Vorteil, wenn man die Matrix  $\Gamma(s)$  durch Streichen einer Zeile in eine Matrix mit vollem Zeilenrang überführt.

(I.1.13) DEFINITION:

Sei  $G(O)$  der Erreichbarkeitsgraph zu  $(O, F)$  mit den Erreichbarkeitskomponenten  $G(s) = (K(s), B(s))$ . Mit  $\hat{\Gamma}(s)$  bezeichnen wir die  $((|K(s)|-1) \times |B(s)|)$ -Matrix, die aus  $\Gamma(s)$  durch Streichen der  $s$ -ten Zeile entsteht. Außerdem sei  $\hat{\Gamma}(O) := \hat{\Gamma}(G(O))$ .

(I.1.14) VEREINBARUNG:

Wenn im folgenden keine Verwechslungsmöglichkeiten bestehen, dann lassen wir bei den eben eingeführten Matrizen  $\Theta(O)$ ,  $\Gamma(O)$  und  $\hat{\Gamma}(O)$  die Spezifikation  $(O)$  weg.

(I.1.15) BEMERKUNG:

$\Theta^t(O)$  ist  $(\text{Def } \Gamma(O) \times B(O))$ -Matrix und  $\hat{\Gamma}(O)$  ist  $((|K(O)|-|Q|) \times |B(O)|)$ -Matrix. Ist  $A$  eine positiv-definite  $(|B(O)| \times |B(O)|)$ -Matrix, dann gilt: Die  $(|B(O)| \times |B(O)|)$ -Matrix

$$\begin{bmatrix} \Theta^t(O) & A \\ & \hat{\Gamma}(O) \end{bmatrix} \text{ ist regulär.}$$

(vgl. Sätze I.1.8) und (I.1.10).)

Für die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit sind zwei Erreichbarkeitsgraphen von Bedeutung:

(I.1.16) DEFINITION:

Seien  $G = (K, B)$  ein Graph und  $O, D \in K, W = O \times D$ .

Der Graph  $G(W, G)$  heißt der durch  $W$  und  $G$  erzeugte (oder kurz: durch  $(W, G)$  erzeugte) Quell-Bogengraph, wenn  $G(W, G)$  gleich dem Erreichbarkeitsgraphen  $G(O)$  ist.

"Quell-Bogengraph" ist zunächst nur ein Name für den Graphen  $G(W,G)$ , dessen Bedeutung jedoch im folgenden "intuitiv" klar wird, weil die Menge  $O$  die "Quellen von Flüssen" charakterisieren wird.

$G(W,G)$  besteht also aus  $|O|$  "Kopien" des Graphen  $G$ , wobei in jeder Kopie jeweils diejenigen Knoten und Bogen fehlen, die nicht über einen Weg von  $s \in O$  nach  $t \in D$  erreichbar sind.

(I.1.17) DEFINITION:

Seien  $G = (K,B)$  ein Graph und  $O, D \subset K$ ,  $W = O \times D$ ,  $P \subset P_W$ .

Außerdem sei für alle  $(s,t) \in W$   $P_{st} \cap P \neq \emptyset$  und zu jedem  $s \in O$  bezeichne  $D_s$  eine Kopie von  $D$ .

Der Graph  $G(W,P)$  heißt der durch  $W$  und  $P$  erzeugte (oder kurz: durch  $(W,P)$  erzeugte) Weggraph, wenn er aus  $|O|$  Zusammenhangskomponenten  $G_P(s) := (K_P(s), B_P(s))$  besteht, so daß gilt:

$$K_P(s) := \{s\} \cup D_s \text{ und}$$

$$B_P(s) := P_{sD_s} \cap P.$$

$G$  nennen wir (den  $G(W,P)$  zugrundeliegenden) Bogengraphen.

Im Weggraph gelten für  $p \in B_P(s)$  mit  $p \in P_{st}$  folgende Beziehungen:

$$\omega_{G(W,P)}^+(s) \ni p \in \omega_{G(W,P)}^-(t).$$

Soweit keine Verwechslungen möglich sind, bezeichnen wir  $\bigcup_{s \in O} D_s$  wiederum mit  $D$ . Wir betrachten im folgenden nur (zugrundeliegende) Graphen  $G$ , zu denen die Graphen  $G(W,G)$  und  $G(W,P)$  existieren, d.h. wir gehen davon aus, daß gilt:

$$P_{st} \cap P \neq \emptyset \text{ (für alle } (s,t) \in W).$$

Da der Bogengraph  $G$  in den Anwendungen dieser Arbeit immer ein Verkehrsnetz repräsentiert, sind diese Forderungen praktisch immer erfüllt. Wenn nämlich, wie im folgenden, die Menge  $O$  Startpunkte von Fahrten und die Menge  $D$  Zielpunkte von Fahrten im Verkehrsnetz darstellen, dann kann man davon ausgehen, daß jeder Zielpunkt von jedem Startpunkt aus über einen Weg erreicht werden kann. Sowohl der Quell-Bogengraph  $G(W,G)$  als auch der Weggraph  $G(W,P)$  sind Erreichbarkeitsgraphen mit  $|O|$  Erreichbarkeitskomponenten. Wir definieren noch:

$$\mathcal{W}(W,G,P) := \{G(W,G), G(W,P)\}.$$

(I.1.18) BEMERKUNG:

Im Weggraphen  $G(W,P)$  gilt:  $B(s) = \omega_{G(W,P)}^+(s)$ . Außerdem ist jede Zykelmatrix  $\Theta(s)$  ( $s \in O$ ) eine Blockdiagonalmatrix mit  $|D|$  Blöcken  $\Theta(s,t)$  ( $t \in D_s$ ). d.h.

$$\Theta(s) = \text{diag}(\Theta(s,t))_{t \in D_s}.$$

Zur Veranschaulichung diene folgendes

(I.1.19) BEISPIEL:

Sei  $G = (K,B)$  ein Graph mit  $O = \{s, s'\}$  und  $D = \{t, t'\}$  und

$$|P_{st}| = 4, |P_{st'}| = 2, |P_{s't}| = 3, |P_{s't'}| = 1.$$

Dann hat der Weggraph  $G(W,P_W)$  folgende Gestalt:

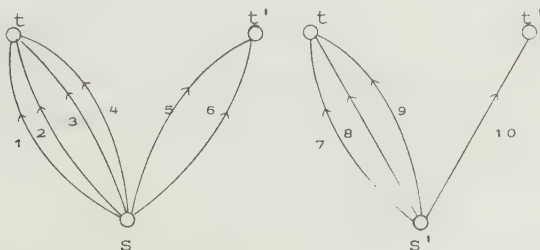


Abbildung 1. Beispiel eines Weggraphen.

Die Matrix  $\Gamma(G(W, P_w))$  hat folgende Form:

|    | 1  | 2        | 3  | 4  | 5  | 6 | 7  | 8        | 9  | 10 |
|----|----|----------|----|----|----|---|----|----------|----|----|
| s  | 1  | 1        | 1  | 1  | 1  | 1 |    |          |    |    |
| t  | -1 | -1       | -1 | -1 |    |   |    | $\sigma$ |    |    |
| t' |    |          |    | -1 | -1 |   |    |          |    |    |
| s' |    |          |    |    |    |   | 1  | 1        | 1  | 1  |
| t  |    | $\sigma$ |    |    |    |   | -1 | -1       | -1 |    |
| t' |    |          |    |    |    |   |    |          |    | -1 |

Beispiele von Zykelmatrizen für den angegebenen Weggraphen:

|    |          |          |          |          |          |          |          |       |          |  |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|----------|--|
| 1  | 1        | 0        | $\sigma$ |          |          |          |          |       |          |  |
| 2  | $\sigma$ | 1        | $\sigma$ |          |          |          |          |       |          |  |
| 3  | $\sigma$ | $\sigma$ | 1        | $\sigma$ |          |          |          |       |          |  |
| 4  | -1       | -1       | -1       |          |          |          |          |       |          |  |
| 5  |          |          |          | 1        |          |          |          |       |          |  |
| 6  |          |          |          | -1       |          |          |          |       |          |  |
| 7  | $\sigma$ |          |          |          | 1        | $\sigma$ |          |       |          |  |
| 8  |          |          |          |          | $\sigma$ | 1        |          |       |          |  |
| 9  |          |          |          |          | -1       | -1       |          |       |          |  |
| 10 | $\sigma$ | .....    | $\sigma$ |          |          |          | $\sigma$ | ..... | $\sigma$ |  |

Zwischen verschiedenen Knotenpaaren  $(s, t) \in W$  soll eine gewisse Anzahl von "Fahrten" abgewickelt werden. Mittels dieser Fahrtenanzahl definieren wir im Quell-Bogengraphen und im Weggraphen je einen Ergiebigkeitsvektor. Im Hinblick auf die später zu entwickelnde Theorie erweist es sich als notwendig anzunehmen, daß für jedes Quell-Ziel-Paar die Fahrtenzahl größer als Null ist. Dies bringt jedoch keine wesentliche Einschränkung für die folgenden Anwendungen.

(I.1.20) DEFINITION:

Sei  $G = (K, B)$  ein Graph und seien  $O, D \subset K$ ,  $W = O \times D, P \subset P_W$ , so daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  existieren.

Für alle  $(s, t) \in W$  gebe es  $N_{st} \geq 0$ .  $(N_{st})_{(s, t) \in W}$  nennen wir die Nachfrage- oder Fahrtenmatrix zu den Quell-Ziel-Paaren  $(s, t) \in W$ .

Sei  $G' = (K(O), B(O)) \in \tilde{W}(W, G, P)$ .  $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{K(O)}$  heißt Ergiebigkeitsvektor zu den Quellen  $O$ , den Zielen  $D$  und den Quell-Ziel-Paaren  $W = O \times D$ , wenn gilt:

$$\tilde{N} = (\tilde{N}^s)_{s \in O} \text{ und für jedes } s \in O \text{ ist } \tilde{N}^s \in \mathbb{R}^{K(s)}.$$

Weiterhin muß für  $(s, t) \in W$  gelten:

$$\tilde{N}_t^s := -N_{st},$$

$$\tilde{N}_s^s := \overline{\sum_{t \in D} N_{st}},$$

$$\tilde{N}_k^s := 0 \text{ für } k \in K(s), k \neq s, k \neq t.$$

$\mathcal{N}(G', W)$  bezeichnet die Menge aller Ergiebigkeitsvektoren zum Graphen  $G'$  und den Quell-Ziel-Paaren  $W$ .

$O_s := N_s^s$  nennen wir Quellstärke der Quelle  $s \in O$  und die Summe  $D_t := \left| \overline{\sum_{s \in O} N_{st}^s} \right|$  Zielstärke des Ziels  $t \in D$ .

Durch die so vorgegebenen Nachfragen werden "Flüsse" in den Graphen aus  $\tilde{W}(W, G, P)$  erzeugt, die folgender fundamentalen "Kirchhoff-regel" genügen:

(I.1.21) DEFINITION:

Sei  $G = (K, B)$  ein Graph und seien  $O, D \subset K$ ,  $W = O \times D$ ,  $P \subset P_W$ , so daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  existieren.

Weiter seien  $G' = (K(O), B(O)) \in \tilde{W}(W, G, P)$ ,  $\tilde{N} \in \mathcal{N}(G', W)$  und  $s \in O$ .

Die Abbildung

$$F^s: B(s) \rightarrow \mathbb{R}^{B(s)}$$

$$a \rightarrow F^s$$

$$I.1.22) \text{ mit } \frac{\overline{\phantom{x}}}{a\theta\omega^+(k)} F_a^s - \frac{\overline{\phantom{x}}}{a\theta\omega^-(k)} F_a^s = N_k^s$$

für  $k \in K(s)$ , heißt Fluß aus der Quelle  $s \in C$  heraus mit dem Ergiebigkeitsvektor  $N^s$ .

$F = (F^s)_{s \in C}$  heißt Fluß aus (den Quellen)  $O$  heraus mit Ergiebigkeitsvektoren  $N = (N^s)_{s \in O}$ , wenn für jedes  $s \in O$  (I.1.22) gilt.

#### I.1.23) BEMERKUNG:

Es gelten die gleichen Bezeichnungen wie in den vorangegangenen Definitionen:

$F = (F^s)_{s \in O}$  ist ein Fluß aus  $O$  heraus mit  $N = (N^s)_{s \in O}$  genau dann, wenn  $\Gamma F = N$ . Außerdem sind äquivalent:

$$(1) \quad \Gamma F = N,$$

$$(2) \quad \hat{\Gamma} F = \hat{N},$$

wobei  $\hat{\Gamma}$  bzw.  $\hat{N}$  durch Streichen der jeweils  $s$ -ten Zeilen ( $s \in O$ ) aus  $\Gamma$  bzw.  $N$  entstehen.

Flüsse in den Graphen  $G(W, C)$  bzw.  $G(W, P)$  induzieren "Flüsse" im zugrundeliegenden Graphen  $G$ . Hierzu benötigen wir die folgende

#### I.1.24) DEFINITION:

Seien  $G = (K, E)$  ein Graph,  $O, D \subset K$ ,  $W = O \times D$ ,  $P \subset P_{\hat{A}}$ , so daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  definiert sind. Dann definieren wir die Abbildungen:

$$(I.1.25) \quad \Delta^{BO}: \mathbb{R}^{B(O)} \rightarrow \mathbb{R}^B$$

$$F \rightarrow f$$

$$\text{mit } f_a := \frac{\prod_{s \in O} F_a^s}{a \in B(s)} \text{ für } a \in B$$

$$(I.1.26) \quad \Delta^{BP}: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^B$$

$$F \rightarrow f$$

$$\text{mit } f_a := \frac{\prod_{p \in P} F_p}{a \in p} \text{ für } a \in B$$

$$(I.1.27) \quad \Delta^{OP}: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^{B(O)}$$

$$F \rightarrow H$$

$$\text{mit } H_a^s := \frac{\prod_{p \in P} F_p}{\prod_{p \in \omega^+(s)} a \in p} \text{ für } s \in O, a \in B(s) .$$

(I.1.28) BEMERKUNG:

Die in (I.1.24) definierten Abbildungen sind durch die nachstehenden Matrizen darstellbar.

$$(\Delta^{BO})_{a(bs)} = \begin{cases} 1, & a = b \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \quad 1)$$

für  $b \in B(s)$ ,  $s \in O$ ,  $a \in B$ ;

$$(\Delta^{BP})_{ap} = \begin{cases} 1, & a \in p \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $a \in B$ ,  $p \in P$ ;

$$(\Delta^{OP})_{(as)p} = \begin{cases} 1, & p \in \omega^+(s), a \in p \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $a \in B(s)$ ,  $s \in O$ ,  $p \in P$ .

1) Der Index (bs) bezeichnet den Bogen b in der s-ten Erreichbarkeitskomponente.

Außerdem sei

$$(\Delta_s^{BO})_{ab} := \begin{cases} 1, & a = b \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $b \in B(s)$ ,  $a \in B$  und  $s \in O$ ,

so daß gilt:

$$\Delta^{BO} = [\Delta_{s_1}^{BO}, \Delta_{s_2}^{BO}, \dots, \Delta_{s_n}^{BO}]$$

mit  $O = \{s_1, \dots, s_n\}$ .

$\Delta_s^{BO}$  liefert also eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^{B(s)}$  in  $\mathbb{R}^B$ .

Weiter benötigen wir noch für  $w \in W$

$$(\Delta_w^{BP})_{ap} := \begin{cases} 1, & a \in p \in P_w \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist dann:

$$\Delta^{BP} = [\Delta_{w_1}^{BP}, \dots, \Delta_{w_m}^{BP}]$$

mit  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ .

Die so definierten " $\Delta$ -Matrizen" sind Inzidenzmatrizen von Bogen in  $G(W, G)$  mit Bogen im Bogengraph, von Wegen im Bogengraph mit Bogen im Bogengraph bzw. von Wegen im Bogengraph mit Bogen in  $G(W, G)$ .

Es gilt übrigens:

$$\Delta^{BP} = \Delta^{BO} \Delta^{OP}.$$

Wir führen nun folgende Flußmengen ein:

(I.1.29) DEFINITION:

Seien  $G = (K, B)$  ein Graph,  $O, D \in K$ ,  $W = O \times D$ ,  $P \in P_W$ , so daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  existieren.

Sei  $G' = (K', B') \in \mathcal{W}(G, W, P)$  und  $N(G') \in \mathcal{N}(G', W)$ .

Wir setzen

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}(G') := \{F \in \mathbb{R}_+^{B'} \mid \Gamma(G')F = N(G')\}$$

und speziell

$$\mathcal{F}_O := \mathcal{F}(G(W, G)) \text{ und } \mathcal{F}_P := \mathcal{F}(G(W, P)).$$

$\mathcal{F}$  nennen wir die Menge der zulässigen Flüsse (zum Ergiebigkeitsvektor  $N(G')$ ),  $\mathcal{F}_O$  nennen wir Menge der zulässigen Quell-Bogenflüsse (zu  $N(G(W, G))$ ) und  $\mathcal{F}_P$  nennen wir Menge der zulässigen Wegflüsse (zu  $N(G(W, P))$ ).

(I.1.30) BEMERKUNG:

Mit den in (I.1.24) und (I.1.29) eingeführten Bezeichnungen haben wir folgendes Diagramm:

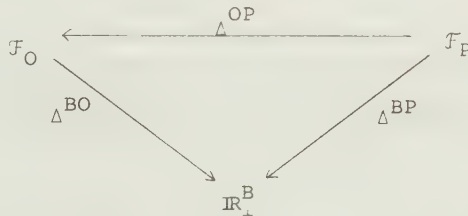


Abbildung 2. Zusammenhang zwischen Flußmengen und Inzidenzmatrizen

Aufgrund der Definitionen (I.1.24) und (I.1.29) ist klar, daß  $\Delta^{BO} \mathcal{F}_O \subset \mathbb{R}_+^B$  und ebenso  $\Delta^{BP} \mathcal{F}_P \subset \mathbb{R}_+^B$  sind. Außerdem ist leicht ersichtlich, wiesich in beiden Fällen das Erhaltungsgesetz (I.1.22) auch auf  $\Delta^{BO} F$  (für  $F \in \mathcal{F}_O$ ) bzw. auf  $\Delta^{BP} H$  (für  $H \in \mathcal{F}_P$ ) überträgt.

Somit kann man bei  $\Delta^{BO}F$  bzw.  $\Delta^{BP}H$  von einem Bogenfluß (im Graphen  $G$ ) sprechen. Für die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit stehen jedoch  $\mathcal{F}_O$  und  $\mathcal{F}_P$  mehr im Vordergrund.

Wir geben nun Kostenfunktionen an, die vom Fluß und auch von Parametern aus einer gewissen Parametermenge  $A$  abhängen. Ein Spezifikum dieser Abhandlung ist die Einführung eines additiven Kostenterms (Regularisierungsterms), der dazu führt, daß alle Flußkomponenten positiv sind.

(I.1.31) DEFINITION:

Seien  $G = (K, B)$  ein Graph,  $O, D \in K$ ,  $W = O \times D$ ,  $P \in \mathbb{P}_n$ , so daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  existieren. Außerdem sei  $l \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{R}^l$  eine Parametermenge.

Für jeden Bogen  $a \in B$  des Graphen  $G$  sei eine Bogenkostenfunktion gegeben:

$$k_a: \mathbb{R}_+^B \times A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \alpha) \mapsto k_a(x, \alpha).$$

Sei nun  $(G', \Delta) \in \{(G(W, G), \Delta^{BO}), (G(W, P), \Delta^{BP})\}$ .

Für jeden Bogen  $a \in B(s)$  der Erreichbarkeitskomponente  $G'(s)$  zu  $s \in O$  von  $G'$  sei für

$$\sigma(s) \in \mathbb{R}_+^*: \quad \partial_a^s: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_a^s \mapsto \sigma(s) \ln X_a^s$$

und für

$$\sigma(s) = \emptyset: \quad \partial_a^s = \emptyset.$$

Wir definieren nun für  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^{B(0)}$  und  $\sigma(s) > \emptyset$

$$c_a^s(x, \alpha) := \check{c}_a^s(x_a^s) + (\Delta^t k(\Delta x, \alpha))_a^s$$

und für  $x \in (\mathbb{R}_+)^{B(0)}$  und  $\sigma(s) = \emptyset$

$$c_a^s(x, \alpha) := (\Delta^t k(\Delta x, \alpha))_a^s.$$

Zur Abkürzung der Schreibweise führen wir folgende Vektoren ein:

$$k := (k_a)_{a \in B},$$

$$\check{c} := (\check{c}_a^s)_{\substack{s \in O \\ a \in B(s)}},$$

$$c := (c_a^s)_{\substack{s \in O \\ a \in B(s)}},$$

$$\bar{k} := \bar{k}(x, \alpha) := \Delta^t k(\Delta x, \alpha).$$

(I.1.32) BEMERKUNG:

Es gilt für  $(G', \Delta) = (G(W, G), \Delta^{BO})$ :

$$\bar{k}_a^s(x, \alpha) = k_a(\Delta^{BO} x, \alpha).$$

Für  $(G', \Delta) = (G(W, P), \Delta^{BP})$  gilt:

$$\bar{k}_p(x, \alpha) = \overline{\bigcup_{a \in p}} k_a(\Delta^{BP} x, \alpha).$$

Alle grundlegenden Elemente für die Untersuchungen dieser Arbeit sind nun bereitgestellt. Sie sollen wie folgt zusammengefaßt werden:

(I.1.33) DEFINITION:

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ein  $n$ -fach stetig differenzierbares Transportnetzwerk ist ein 6-Tupel  $T = (G, G', \Delta, N, k, \alpha)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $G = (K, B)$  ist ein Graph, in dem  $O, D \in K$ ,  $W = O \times D$  und  $P \in P_W$  ausgezeichnet sind;
- $(G', \Delta) \in \{(G(W, G), \Delta^{BO}), (G(W, P), \Delta^{BP})\}$ ,  
wobei wir generell voraussetzen, daß  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  existieren;

- $N \in \mathcal{N}(G', W)$ ;
- $k: \mathbb{R}_+^B \times A \rightarrow \mathbb{R}^B$ , wobei  $k$   $n$ -fach stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}_+^B \times A$  ist und  $A \subset \mathbb{R}^L$  für  $L \in \mathbb{N}$ ;
- $\sigma \in \mathbb{R}_+^O$ .

$\mathcal{T}^{(n)}$  ist die Menge aller  $n$ -fach stetig differenzierbaren Transportnetzwerke.

Ist  $n = \emptyset$ , dann sei  $k$  nur stetig. Fehlt die Spezifikation  $(n)$ , dann werden keinerlei Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über  $k$  gemacht.

Wenn wir im folgenden fordern  $T \in \mathcal{T}^{(n)}$ , dann sind alle Komponenten von  $T$  wie in der Definition (I.1.33) mit den gleichen Buchstaben eingeführt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch der Ergiebigkeitsvektor  $N$  von Parametern abhängen kann, wie dies z.B. in Abschnitt III.3 angenommen wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde jedoch an dieser Stelle auf eine derartige Verallgemeinerung verzichtet.

## 1.2 Charakterisierung von Gleichgewichten durch Gleichungen und Optimierungsaufgaben

Wir interessieren uns in einem Transportnetzwerk für ganz bestimmte "Flußzustände", die sog. Gleichgewichtsflüsse. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß für die Wege zwischen Quelle und Ziel gilt: Belegte Wege sind kürzeste Wege (im Sinne der eingeführten Kostenfunktionen, sh. (I.1.31)). Die Formulierungen sind so gehalten, daß sowohl Gleichgewichte im Quell-Bogengraphen als auch im Weggraphen behandelt werden können.

### (I.2.1) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $T = (G, G', \Delta, N, k, \sigma)$ . Bei festem  $\alpha \in A$  ist ein Fluß  $F \in \mathcal{F}(G')$  zum Ergiebigkeitsvektor  $N = N(\alpha)$  im Gleichgewicht, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}^{K(0)}$  gibt, so daß für alle  $s \in O$  und alle  $a \in B(s)$  mit  $a \in (i, j)$  gilt:

$$(I.2.2) \quad \lambda_i^s - \lambda_j^s \leq c_a^s(F, \alpha) \text{ und}$$

$$(I.2.3) \quad F_a^s [c_a^s(F, \alpha) - \lambda_i^s + \lambda_j^s] = 0.$$

Wir sagen auch:  $F$  ist ein Gleichgewichtsfluß und  $\lambda$  das (zugehörige) Gleichgewichtspotential. Die Menge der Gleichgewichtsflüsse im Transportnetzwerk  $T$  bezeichnen wir mit  $G(T)$ .

### (I.2.4) BEMERKUNG:

Für  $F_a^s > 0$  folgt aus (I.2.3) die Gleichung

$$(I.2.5) \quad c_a^s(F, \alpha) - \lambda_i^s + \lambda_j^s = 0.$$

(I.2.6) BEMERKUNG:

Wenn  $G'$  gleich dem Weggraphen  $G(W,P)$  gewählt ist,  
dann sind äquivalent:

$$(1) F \in \mathcal{G}(T)$$

(2) Es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}^W$ , so daß für alle  $w \in W$  und alle  $p \in P_w$  gilt:

$$(I.2.7) \quad \lambda_w \leq c_p(F, \alpha) \quad \text{und}$$

$$(I.2.8) \quad F_p \cdot c_p(F, \alpha) - \lambda_w = 0$$

Beweis:

Wenn  $F \in \mathcal{G}(T)$  ist und wir die gleichen Bezeichnungen wie in  
(I.2.1) verwenden, so schreiben wir wegen (I.1.29) und  
(I.1.31) für  $F_a^s$  nun  $F_p$  und für  $c_a^s$  nun  $c_p$ .

Setzen wir außerdem für  $w = (s, t) \in W$

$$\lambda_w = \lambda_s^s - \lambda_t^s$$

so folgt die Behauptung.

Falls  $F_p > 0$  ist, so sind die beiden Formeln (I.2.7) und (I.2.8)  
gleichbedeutend mit

$$(I.2.9) \quad c_p(F, \alpha) - \lambda_w = 0.$$

DAFERMOS [4][5] und BRUYNOOGHE et al. [3] legen in ihren Arbeiten  
beispielsweise einen Weggraphen zugrunde und verwenden deshalb als  
Gleichgewichtsdefinition die Formeln (I.2.7) und (I.2.8); NGUYEN [9]  
und PETERSEN [10] verwenden (I.2.2) und (I.2.3) im Quell-Bogengraphen.  
Jedoch sind bei allen Autoren [1] bis [12] die Parameter  $\sigma(s)$ ,  $s \in O$ ,  
gleich Null. Doch gerade für  $\sigma > 0$  sind Gleichgewichte elegant durch  
Gleichungssysteme zu beschreiben:

(I.2.10) SATZ (Charakterisierung von Gleichgewichten durch Gleichungen)

Sei  $T \in \mathcal{T}$ .

Für  $F \in \mathbb{R}^{B(0)}$  mit  $\sigma > 0$  (und damit auch für  $F > 0$ ) sind die Aussagen (1) - (4) äquivalent:

(1)  $F \in \mathcal{G}(T)$ .

(2) Es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}^{K(0)}$  mit

$$c(F, \alpha) - \Gamma^t \lambda = \theta,$$

$$\Gamma F - N = \theta.$$

(3) Für jede Zykelmatrix  $\theta = \theta(0)$  gilt:

$$\theta^t c(F, \alpha) = \theta,$$

$$\Gamma F - N = \theta.$$

(4) Es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}^{K(0)}$  mit

$$F - \phi(F, \lambda, \alpha) = \theta$$

$$\Gamma F - N = \theta$$

wobei gilt:

$$\phi_a^s(F, \lambda, \alpha) := \exp\left[\frac{1}{\sigma(s)}(\lambda_i^s - \lambda_j^s - \bar{k}_a^s(F, \alpha))\right] \text{ und}$$

$$\phi := (\phi^s)_{s \in O}$$

für  $s \in O$  und  $a \in B(s)$  mit  $a \in (i, j)$ .

Beweis:

(2) beschreibt die Gleichung (I.2.5) in Vektorform. (3) ist äquivalent zu (2), weil  $\theta^t \Gamma^t = \theta$  ( $\theta$  ist die entsprechende Nullmatrix). (4) ist eine Umschreibung von (2), denn für  $a \in (i, j) \in B(s)$ ,  $s \in O$  besagt (2)

$$\sigma(s) \ln F_a^s + \bar{k}_a^s(F, \alpha) - \lambda_i^s + \lambda_j^s = \theta,$$

also:

$$\ln F_a^s = \frac{1}{\sigma(s)} [\lambda_i^s - \lambda_j^s - (\bar{k}_a^s(F, \alpha))] .$$

(I.2.11) BEMERKUNG:

Sei  $T = (G, G(W, P), \Delta^{BP}, N, k, \sigma)$ .

Für  $F \in \mathcal{F}_P$  mit  $F > 0$  und  $\sigma > 0$  gilt:

$F \in \mathcal{G}(T)$  genau dann, wenn für alle  $w \in W$  und alle  $p \in P_w$  gilt:

$$(I.2.12) \quad F_p = \phi_p(F, \lambda, \alpha) = \frac{N_w \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma(s)} \bar{k}_p(F, \alpha) \right\}}{\prod_{q \in P_w} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma(s)} \bar{k}_q(F, \alpha) \right\}}$$

Wenn  $G' = G(W, P)$  ist, so kann  $\lambda$  mit Hilfe von  $\Gamma F = N$  eliminiert werden. Wir schreiben deshalb:

$$\phi_p(F, \alpha) \text{ statt } \phi_p(\bar{F}, \lambda, \alpha).$$

Beweis:

Seien  $F \in \mathcal{G}(T)$ ,  $w \in W$ ,  $p \in P_w$ , dann gilt wegen (I.2.10) (4):

$$(I.2.13) \quad F_p = \exp\left(\frac{1}{\sigma(s)} \lambda_w\right) \exp\left(\frac{-1}{\sigma(s)} \bar{k}_p(F, \alpha)\right).$$

Außerdem gilt  $\prod_{p \in P_w} F_p = N_w$ , somit können wir weiterschreiben:

$$N_w = \exp\left(\frac{\lambda_w}{\sigma(s)}\right) \prod_{p \in P_w} \exp\left(\frac{-1}{\sigma(s)} \bar{k}_p(F, \alpha)\right)$$

oder

$$\exp\left(\frac{\lambda_w}{\sigma(s)}\right) = \frac{N_w}{\prod_{q \in P_w} \exp\left\{ -\frac{1}{\sigma(s)} \bar{k}_q(F, \alpha) \right\}}$$

Nach Einsetzen in (I.2.13) erhält man die Behauptung.

Eine Charakterisierung "optimaler" Flußzustände in Netzwerken durch Fixpunkte wird bereits von HAUTZINGER

[46] angegeben, jedoch nicht im Rahmen einer Gleichgewichtstheorie.

Außerdem sei bemerkt, daß die Formeln (I.2.12) und (I.2.10) (4) eine gewisse Verallgemeinerung der üblichen stochastischen Wegewahlmodelle darstellen, denn es werden hier flußabhängige Kosten verwendet (siehe z.B. DAGANZO/SHEFFI [42] bzw. DIAL [44]). In Anlehnung an die dort gebräuchliche Terminologie nennen wir die Größen  $\sigma(s)$ ,  $s \in O$  Streuparameter. Je größer  $\sigma(s) > 0$ ,  $s \in O$ , um so mehr streuen die Gleichgewichtsflüsse um die kürzesten Wege (also die belegten!) des Ansatzes (I.2.7) und (I.2.8) für  $\sigma = 0$ .

Gleichgewichtsflüsse  $F \in G(T)$  lassen sich auch durch Optimierungsaufgaben, die sog. assozierten Optimierungsprobleme, charakterisieren. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen:

(I.2.14) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$ . Wir setzen für  $\sigma > 0$

$$(I.2.15) \quad L(F, \alpha) := \bigcup_{\substack{s \in O \\ a \in B(s)}} \sigma(s) [F_a^s \ln F_a^s - F_a^s],$$

wobei  $F > 0$ . Für  $\sigma = 0$  sei  $L(F, \alpha) \in \mathcal{O}$ .

Außerdem bezeichne

$$(I.2.16) \quad H(f, \alpha) := \left[ \frac{\partial k_a(f, \alpha)}{\partial f_b} \right]_{a, b \in B}$$

die Jacobimatrix für  $f \in \mathbb{R}_+^B$ .

(I.2.17) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$ . Für alle  $f \in \mathbb{R}_+^B$  und alle  $\alpha \in A$  sei die Matrix  $H(f, \alpha)$  symmetrisch.

Dann gibt es  $S: \mathbb{R}^{B(0)} \times A \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(I.2.18) \quad \frac{\partial S(f, \alpha)}{\partial f_a^s} = c_a^s(f, \alpha)$$

für alle  $s \in O$  und alle  $a \in B(s)$ .

Beweis:

Wenn  $H(f, \alpha)$  symmetrisch für alle  $f \in \mathbb{R}_+^B$  ist, so besitzt  $(k_a(f, \alpha))_{a \in B}$  eine Stammfunktion  $K(f, \alpha)$  mit

$$(I.2.19) \quad \frac{\partial K(f, \alpha)}{\partial f_a} = k_a(f, \alpha) .$$

(I.2.20) Dann leistet  $S(f, \alpha) := L(f, \alpha) + K(f, \alpha)$  das Verlangte.

(Siehe z.B. ERWE [61]).

(I.2.21) BEMERKUNG:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$ . Dann ist  $\Delta^t H(f, \alpha) \Delta$  symmetrisch und positiv semidefinit, wenn  $H(f, \alpha)$  symmetrisch und positiv semidefinit ist. Zwischen Gleichgewichtsflüssen und dem assoziierten Optimierungsproblem besteht nun folgender Zusammenhang:

(I.2.22) SATZ' (Charakterisierung von Gleichgewichten durch Optimierungsaufgaben):

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$ . Die Jacobimatrix  $H(f, \alpha)$  sei positiv semidefinit und symmetrisch für alle  $f \in \mathbb{R}_+^B$  und  $\alpha \in A$ .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(1) \hat{F} \in \mathcal{G}(T)$$

$$(2) S(\hat{F}, \alpha) = \min_{F \in \mathcal{F}} S(F, \alpha),$$

wobei  $S$  wie in (I.2.20) definiert ist.

Weiter gilt:

Ist  $\sigma > 0$ , so ist  $\hat{F}$  eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wenn  $H(f, \alpha)$  positiv semidefinit und symmetrisch ist, dann gibt es  $S(F, \alpha)$ , wie in (I.2.20) definiert, und  $S$  ist eine konvexe Funktion in  $\mathcal{F}$ . Nach dem Satz von Kuhn-Tucker (siehe COLLATZ/WETTERLING [56] S. 124) gilt also:  $S$  ist über  $\mathcal{F}$  genau dann minimal, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}^{K(0)}$  und  $\gamma \in \mathbb{R}_+^{B(0)}$  gibt, so daß für alle  $s \in O$  und alle  $a \in (i, j) \in B(s)$  gilt:

$$\frac{\partial S(\hat{F}, \alpha)}{\partial F_a^s} = \lambda_i^s - \lambda_j^s + \gamma_a^s \text{ und } \gamma_a^s F_a^s = 0.$$

Da nun  $\frac{\partial S(\hat{F}, \alpha)}{\partial F_a^s} = c_a^s(\hat{F}, \alpha)$ , folgt der erste Teil des Satzes.

Sei nun  $\sigma > 0$  und  $\alpha$  fest aus  $A$ .

$$(I.2.23) \text{ Die Matrix } \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(F, \alpha)}{\partial F_a^s \partial F_a^s} \end{bmatrix}_{\substack{a, a' \in B(s) \\ s, s' \in O}} =: \tilde{A}(F, \alpha) = \text{diag} \left( \frac{\sigma(s)}{F_a^s} \right)_{\substack{a \in B(s) \\ s \in O}}$$

ist positiv definit in  $\mathcal{F} \times A$ .

Deshalb ist  $\tilde{A}(F, \alpha) + (\Delta)^t_{H_T}(F, \alpha) \Delta$  ( $f = \Delta F$ ) positiv definit in  $\mathcal{F} \times A$  und  $S(F, \alpha)$  ist strikt konvex über  $\mathcal{F}$  und besitzt ein eindeutig bestimmtes Minimum.

### I.3 Existenz von Gleichgewichten und Verhalten bei Variation des Streuparameters $\sigma$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Fragen, wann Gleichgewichtsflüsse in Transportnetzwerken existieren und wie sie auf Veränderungen des Streuparameters  $\sigma$  (hier:  $\sigma \rightarrow 0$ ) reagieren. Da in (I.2.22) Gleichgewichte als Lösung eines assoziierten Optimierungsproblems charakterisiert werden und die Zielfunktion  $S$  durch  $\sigma$  stetig veränderbar ist, könnten zur Beantwortung der zweiten Frage z.B. auch Ergebnisse aus der Arbeit von DANTZIG/FOLKMANN/SHAPIRO [58] herangezogen werden. Da jedoch hier teilweise (siehe III.2) davon ausgegangen wird, daß das assoziierte Optimierungsproblem nicht immer existiert <sup>1)</sup> (wenn nämlich die Jacobimatrix von  $c$  nicht symmetrisch ist), werden die gestellten Fragen über die Fixpunktcharakterisierung von Gleichgewichten (siehe (I.2.10) (4)) beantwortet. Die hier dargelegte Herleitung der Ergebnisse scheint bislang in der Literatur über Gleichgewichte in Netzwerken nicht vorzuliegen.

Zunächst wird die Existenz von Gleichgewichten  $\hat{F}(\sigma)$  für  $\sigma > 0$  nachgewiesen, wenn die Kostenfunktionen  $k$  stetig sind. Anschließend wird gezeigt, daß jeder Häufungspunkt von  $(\hat{F}(\sigma))_{\substack{\sigma \in \mathbb{R}_+ \\ \sigma \rightarrow 0}}$  ein Gleichgewicht für  $\sigma = 0$  ist. Dies bedeutet dann auch eine Existenzaussage für  $\sigma = 0$ .

#### (I.3.1) HILFSSATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$  und sei  $A$  eine Diagonalmatrix mit lauter positiven Elementen, genauer sei

$$A := \text{diag} (a_b^s)_{\substack{s \in \mathcal{O} \\ b \in \mathcal{B}(s)}} \quad \text{und} \quad a_b^s \in \mathbb{R}_+^*.$$

<sup>1)</sup> Während der Drucklegung dieser Arbeit erschien eine Abhandlung von S. DAFERMOS [75] zu einer ähnlichen Problemstellung.

Dann ist das Gleichungssystem

$$(I.3.2) \quad \Gamma A \, t(\lambda) = N$$

in  $\lambda$  eindeutig lösbar, wenn man verlangt:  $\lambda_s^s = \emptyset$  für alle  $s \in \emptyset$ .

Für  $t(\lambda)$  gelte dabei:

$$(I.3.3) \quad t_a^s(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{\sigma(s)} (\lambda_i^s - \lambda_j^s) \right\}$$

für  $a \in B(s)$ ,  $a \in (i, j)$ ,  $s \in \emptyset$  und  $\sigma(s) \in \mathbb{R}_+^*$ .

Beweis:

Es sei  $b_a^s := -\ln a_a^s$ . Wir betrachten folgende strikt konvexe Optimierungsaufgabe:

$$(I.3.4) \quad \min_{\substack{r \\ a \in B(s) \\ s \in \emptyset}} \sigma(s) [r_a^s \ln r_a^s - r_a^s] + b_a^s r_a^s$$

unter den Nebenbedingungen  $\Gamma r = N \quad (r > 0)$ .

Ähnlich wie in (I.2.22) besagen die Kuhn-Tucker-Bedingungen, daß (I.3.4) eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Außerdem existieren Zahlen  $\lambda$ , so daß gilt:

Nach (I.2.22) hat (I.3.4) eine eindeutig bestimmte Lösung  $r$  mit

$$(I.3.5) \quad \sigma(s) \ln r_a^s + b_a^s = \lambda_i^s - \lambda_j^s.$$

Da  $\Gamma(s)$  den Rang  $|K(s)|-1$  hat, sind die dualen Variablen  $\lambda$  eindeutig bestimmt, wenn man  $\lambda_s^s = \emptyset$  setzt.

Nun besagt aber (I.3.5), daß

$$\begin{aligned} r_a^s &= \exp \left( \frac{1}{\sigma(s)} (\lambda_i^s - \lambda_j^s - b_a^s) \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{\sigma(s)} (\lambda_i^s - \lambda_j^s) a_j^s \right). \end{aligned}$$

Da  $r \in F$  ist, folgt die Behauptung.

(I.3.6) BEMERKUNG:

Im vorangehenden Hilfssatz kann  $\Gamma A \, t(\lambda) = N$  durch  $\Gamma A \, t(\lambda) = \hat{N}$  ersetzt werden, wobei  $\hat{N}$  aus  $N$  durch Streichen der jeweils zu  $s \in \emptyset$  gehörigen Komponenten von  $N$  entsteht.

(I.3.7) BEMERKUNG:

Wie der Beweis von (I.3.1) zeigt, kann (I.3.2) mit Hilfe des Optimierungsproblems (I.3.4) gelöst werden. Lösungsverfahren hierfür werden in II.1 beschrieben

(I.3.8) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(\emptyset)}$ ,  $\sigma > 0$  fest. Zu jedem  $F \in \mathcal{F}$  gibt es genau ein  $\lambda = \lambda(F) \in \mathbb{R}^{K(0)}$  mit  $\lambda_s^s = \emptyset$  ( $s \in \emptyset$ ) und

$$(I.3.9) \quad \Gamma \phi(F, \lambda, \alpha) = N$$

für festes  $\alpha \in A$ .

Die so definierte Abbildung  $F \mapsto \lambda(F)$  ist stetig.

Beweis:

Sei  $A := A(F, \alpha) := \text{diag}(\exp\{-\frac{1}{\sigma(s)} (\bar{k}_a^s(F, \alpha))\})$  und

$t(\lambda)_a^s = \exp\{\frac{1}{\sigma(s)} (\lambda_1^s - \lambda_j^s)\}$ . Offensichtlich ist  $\phi(F, \lambda, \alpha) = A(F, \alpha)t(\lambda)$ . Wegen Hilfssatz (I.3.1) gilt deshalb die erste Aussage des Satzes.

Wegen Bemerkung (I.3.6) kann (I.3.9) durch

$$\hat{\Gamma} A(F, \alpha)t(\lambda) = \hat{N}$$

ersetzt werden.

Nach dem Satz über implizite Funktionen (sh.z.B. ERWE [61])

ist  $F \mapsto \lambda(F)$  lokal stetig, wenn

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{\Gamma} A(F, \alpha)t(\lambda)$$

nicht singulär ist. ( $\frac{\partial}{\partial \lambda}$  entsteht aus  $\frac{\partial}{\partial \lambda}$  durch Streichen der zu  $s \in \emptyset$  gehörigen Komponenten). Es gilt

$$\text{nun: } \nabla = \hat{\Gamma} A \text{diag}(\frac{1}{\sigma(s)} t_a^s) \hat{\Gamma}^t = \hat{\Gamma} \text{diag}(\check{\phi}_a^s) \hat{\Gamma}^t, \text{ mit } \check{\phi}_a^s = \frac{1}{\sigma(s)} \phi_a^s.$$

Mit  $\hat{\Gamma} := \hat{\Gamma} \operatorname{diag}(\sqrt{\phi_a^s})$  ist  $\nabla = \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^t$  und  $\operatorname{Rang} \nabla = \operatorname{Rang} \hat{\Gamma}$ .  
Da  $\hat{\Gamma}$  regulär ist, ist auch  $\nabla$  regulär. Somit ist  
 $F \mapsto \lambda(F)$  stetig.

(I.3.10) EXISTENZSATZ für  $\sigma > 0$ :

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(\mathcal{O})}$ ,  $\sigma > 0$ . Dann ist  $\mathcal{G}(T) \neq \emptyset$ .

Beweis:

Wir zeigen, daß die Abbildung  $F \mapsto \phi(F, \lambda(F), \alpha)$  mindestens einen Fixpunkt hat.  $\phi$  ist stetig in  $F$  und  $\lambda$  auf  $\mathcal{F} \times \mathbb{R}^{K(0)}$ , und  $\lambda(F)$  ist stetig auf  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  ist kompakt und konvex und außerdem ist  $\phi(F, \lambda(F), \alpha) \in \mathcal{F}$ . Dann hat  $\phi$  einen Fixpunkt  $\hat{F}$  nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz (siehe z.B. COLLATZ [57], S. 353).

(I.3.11) SATZ (Verhalten der Gleichgewichte bei Variation von  $\sigma$ ):

Sei  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}_+^*)^0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ ,  $T(\sigma_n) := (G, G', \Delta, N, k, \sigma_n) \in \mathcal{T}^{(\mathcal{O})}$  und  $\hat{F}(\sigma_n) \in \mathcal{G}(T(\sigma_n))$ . Dann gilt:

Jeder Häufungspunkt von  $(\hat{F}(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist aus  $\mathcal{G}(T(0))$ .

Beweis:

Sei  $\hat{F}$  ein Häufungspunkt von  $(\hat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\hat{F}_n := \hat{F}(\sigma_n)$ .

O.B.d.A. bezeichnen wir mit  $\hat{F}_n$  auch eine konvergente Teilfolge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n = \hat{F}$ . Da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\Gamma \hat{F}_n = N$  ist, gilt auch  $\Gamma \hat{F} = N$ .  $\hat{F}_n \in \mathcal{G}(T(\sigma_n))$  heißt:

(I.3.12)  $\sigma_n \ln(\hat{F}_n)_a^s + \bar{k}_a^s(\hat{F}_n, \alpha) - \lambda_i^s(\sigma_n) + \lambda_j^s(\sigma_n) = 0$ , wobei  $a \in (i, j)$ .  
Da  $(\hat{F}_n)_a^s > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , ist dies äquivalent zu:

$$(I.3.13) \quad \sigma_n \cdot (\hat{F}_n)_a^S \ln(\hat{F}_n)_a^S + \\ + (\hat{F}_n)_a^S \{ \bar{k}_a^S(\hat{F}_n, \alpha) - \hat{\lambda}_i^S(\sigma_n) + \hat{\lambda}_j^S(\sigma_n) \} = \emptyset.$$

Wir setzen  $t_{ij}^S(\sigma_n) := \hat{\lambda}_i^S(\sigma_n) - \hat{\lambda}_j^S(\sigma_n)$ . Dann ist zu zeigen, daß die Folge  $(t_{ij}^S(\sigma_n))$  mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Für alle  $a \in B(s)$  mit  $\hat{F}_a^S > \emptyset$  folgert man die Existenz dieses Grenzwertes leicht aus (I.3.13).

Sei nun  $a \in B(s)$  mit  $\hat{F}_a^S = \emptyset$  und sei  $a \in (i, j)$ .

Aus (I.3.12) folgert man zunächst, daß es  $M > \emptyset$  gibt, so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$t_{ij}^S(\sigma_n) < M.$$

Außerdem wissen wir, daß in dem Erreichbarkeitsgraphen  $G'$  der Bogen  $a$  von mindestens einem Weg von  $s$  in die Zielmenge  $D$  durchlaufen wird! Sei  $(s, t) \in W$  so gewählt, daß es einen Weg  $q \in P_{st}$  gibt, so daß  $a \in q$  ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  haben die Wege  $p \in P_{st}$  eine endliche "Länge"  $t_{st}^S(\sigma_n)$ .

Es gibt sogar  $M' \in \mathbb{R}$  derart, daß für schließlich alle  $n \in \mathbb{N}$   $t_{st}^S(\sigma_n) < M'$  ist. Somit kann dann aber für kein  $(i, j) \in B(s)$   $t_{ij}^S(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  gelten, da sonst mindestens für ein  $(l, k) \in B(s)$  gelten müßte, daß  $t_{lk}^S(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Dies wäre ein Widerspruch zur Beschränktheit der  $t_{ij}^S(\sigma_n)$  nach oben. Also kann man o.B.d.A. annehmen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{ij}^S(\sigma_n)$  und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_k^S(\sigma_n)$  für alle  $k \in K(s)$ ,  $s \in O$ , existiert.

Somit lautet (I.3.13) im Limes

$$\hat{F}_a^S \{ \bar{k}_a^S(\hat{F}, \alpha) - \hat{\lambda}_i^S + \hat{\lambda}_j^S \} = \emptyset,$$

wenn man  $\hat{\lambda} := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\sigma_n)$  setzt. Aus (I.3.12) folgt, daß  $\{ \bar{k}_a^S(\hat{F}, \alpha) - \hat{\lambda}_i^S + \hat{\lambda}_j^S \} \geq \emptyset$ .

Somit ist  $\hat{F} \in \mathcal{G}(T(\theta))$ .

Wir können nun auch die Existenz von Gleichgewichte für den Fall  $\sigma=0$  beweisen. Einzige Voraussetzung ist dabei die Stetigkeit der Kostenfunktionen  $k$ . Auf andere Weise wurde dieser Satz schon von NETTER/SENDER [29] bewiesen. Eine ähnliche Aussage findet sich auch bei BRAESS/KOCH [73].

(I.3.14) EXISTENZSATZ für  $\sigma=0$

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(\emptyset)}$ ,  $\sigma=0$ . Dann ist  $\mathcal{G}(T(0)) \neq \emptyset$ .

Beweis:

Es gelten die Bezeichnungen des letzten Satzes. Für

$(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}_+^*)^0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  gibt es nach Satz (I.3.10)

$\hat{F}_n = \hat{F}(\sigma_n) \in \mathcal{G}(T(\sigma_n))$ . Die Folge  $(\hat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist aus  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}$  ist kompakt. Deshalb besitzt  $(\hat{F}_n)$  mindestens einen Häufungspunkt. Dieser liegt jedoch in  $\mathcal{G}(T(0))$  ((I.3.11)). Also ist  $\mathcal{G}(T(0)) \neq \emptyset$ .

Zum Schluß dieses 3. Abschnittes geben wir ein kleines Beispiel für die Abbildung  $\sigma \rightarrow \mathcal{G}(T(\sigma))$  an.

(I.3.15) BEISPIEL:

Gegeben sei das Transportnetzwerk  $TE \mathcal{T}$  mit

$G = (\{s, t\}, \{a, b\})$  mit  $a, b \in \omega^+(s)$  und  $a, b \in \omega^-(t)$

$W = \{(s, t)\}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ,

$k_a(F, \alpha) = F_a + F_b = k_b(F, \alpha)$ .

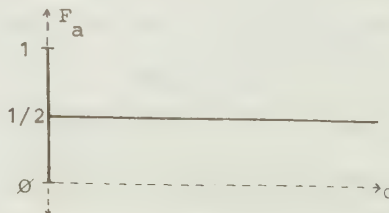
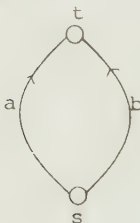


Abbildung 3. Graph und Gleichgewichtsmenge für  $\sigma \geq 0$ .

Es ist dann  $\mathcal{F} = \{(F_a, F_b) \in \mathbb{R}^2 \mid F_a + F_b = 1, F_a \geq 0, F_b \geq 0\}$

und  $c_a(F_a, F_b) = \sigma \ln F_a + F_a + F_b$  und

$$c_b(F_a, F_b) = \sigma \ln F_b + F_a + F_b.$$

Für  $\sigma > 0$  ist  $(F_a, F_b) \in \mathcal{G}(T(\sigma))$  genau dann, wenn  $F_a = F_b = \frac{1}{2}$ .

Für  $\sigma = 0$  ist  $(F_a, F_b) \in \mathcal{G}(T(\sigma))$  genau dann, wenn  $F_a + F_b = 1$ .

Die Zuordnung  $\sigma \mapsto \mathcal{G}(T(\sigma))$  ist in Abbildung 3 dargestellt.

#### I.4 Zusammenhang der Gleichgewichte in $G(W,G)$ und $G(W,P)$

Gegeben seien  $T = (G, G(W,G), \Delta^{BO}, N^G, k, \sigma)$  und  $\hat{T} = (G, G(W,P), \Delta^{BP}, N^P, k, \sigma)$  so daß für alle  $(s,t) \in W$  gilt:  $(N^G)_s^t = (N^P)_s^t$ . In  $T$  und  $\hat{T}$  fließt also zwischen jedem Quell-Ziel-Paar aus  $W$  die gleiche Nachfrage. Wir fragen nun nach dem Zusammenhang zwischen  $\mathcal{G}(T)$  und  $\mathcal{G}(\hat{T})$ . Betrachten wir zunächst folgendes:

##### (I.4.1) BEISPIEL:

Gegeben sei ein Graph  $G = (K,B)$  mit  $K = \{1_1, 1_2, 1_3\}$  und  $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . Außerdem sei  $W = \{(1_1, 1_3)\}$  und  $P = \{p_1, p_2\} = \{(a_1, a_3), (a_2, a_4)\}$ . Die Struktur des Graphen ist Abbildung 4 zu entnehmen.

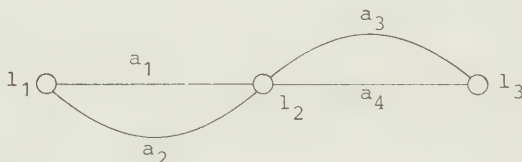


Abbildung 4. Der Graph  $G$  zum Beispiel (I.4.1)

Man sieht sofort:  $P \neq P_W$ .

Für die Kostenfunktionen  $k$  gelte:

$$(I.4.2) \quad k_{a_1} = k_{a_4} = \text{const}_1, \quad \text{const}_2 = k_{a_2} = k_{a_3} > k_{a_1}.$$

Außerdem sei  $\sigma = \emptyset$ .

Wir betrachten dann folgende Transportnetzwerke:

$T = (G, G, E, N^G, k, \sigma)$  mit  $N^G = (1, 0, -1)^t$  (man beachte:  $G = G(W,G)$  und  $\Delta^{BO} = E$ !) und  $\hat{T} = (G, G(W,P), \Delta^{BP}, N^P, k, \sigma)$  mit  $N^P = (1, -1)^t$ . Der Graph

zu  $\hat{T}$  hat die Gestalt wie in Abbildung 3. Gemäß (I.1.31) gilt:

$$\bar{k}_{p_1} = k_{a_1} + k_{a_3} \quad \text{und} \quad \bar{k}_{p_2} = k_{a_2} + k_{a_4}.$$

Es ist  $G(\hat{T}) = \mathcal{F}$ , da  $\bar{k}_{p_1} = \bar{k}_{p_2}$  ist, unabhängig davon, wie sich die Verkehrsnachfrage auf  $p_1$  und  $p_2$  verteilt.

Für  $F > 0$  ist aber  $H := \Delta^{OP} F$  kein Gleichgewicht, d.h.  $H \notin \mathcal{G}(T)$ , denn sonst müßte gelten:

$$k_{a_1} = \lambda_{l_2}^{l_1} - \lambda_{l_1}^{l_1} = k_{a_2}.$$

Dies wäre ein Widerspruch zu (I.4.2).

Wenn jedoch  $P = P_W$  und  $\sigma = \emptyset$  gilt, dann erzeugt jeder Gleichgewichtswegfluß einen Gleichgewichtsbogenfluß. Leitet sich umgekehrt ein Gleichgewichtsbogenfluß aus einem Wegfluß ab, so ist dieser ebenfalls ein Gleichgewichtswegfluß. Hierzu folgender

(I.4.3) SATZ:

Gegeben seien  $T = (G, G(W, G), \Delta^{BO}, N^G, k, \alpha)$  und  $\hat{T} = (G, G(W, P), \Delta^{BP}, N^P, k, \alpha)$  mit  $(N^G)_s^t = (N^P)_s^t$  für alle  $(s, t) \in W$ . Außerdem sei

$$(1) \quad P = P_W,$$

$$(2) \quad \sigma = \emptyset.$$

Für  $F \in \mathcal{F}_P$  gilt dann:  $F \in \mathcal{G}(\hat{T}) \iff \Delta^{OP} F \in \mathcal{G}(T)$ .

Beweis:

"  $\Rightarrow$  " Sei  $F \in \mathcal{G}(T)$  und  $H := \Delta^{OP} F$ . Dann gilt zunächst trivialerweise:  $\Gamma(G(W, G)) \cap H = N^G$ .

Da  $\sigma=0$  ist, gilt  $\bar{c}_p(F, \alpha) = \bar{k}_p(F, \alpha)$ . Wir schreiben im weiteren  $\bar{k}_p$  für  $\bar{k}_p(F, \alpha)$  und  $k_a$  für  $k_a(\Delta^{BP} F, \alpha)$ . Sei  $s \in O$ . Für alle  $j \in K(s)$  ist für  $p \in P_{s,j}$

$$\bar{k}_p = \overline{\lambda_{p \in P_{s,j}}} k_a.$$

Wir definieren  $\lambda^s \in \mathbb{R}^{K(s)}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_s^s &= \emptyset, \\ -\lambda_j^s &= \min \{ \bar{k}_p \mid p \in P_{s,j} \} \text{ für } j \in K(s) \end{aligned}$$

Dann ist  $\lambda^s$  eindeutig bestimmt. Sei  $w=(s,t) \in W$ . Wir definieren  $p(i) \in P_{s,t}$  (Weg über  $i$  von  $s$  nach  $t$ ) durch

$$\begin{aligned} p(i) &:= ((s, k_1(i)), \dots, (k_{m_1}(i), i), (i, j), (j, k_{m_2}), \dots, (k_n, t)), \text{ wobei} \\ &i \in \omega_G^-(j) \text{ und } k_1(i), \dots, k_{m_1}(i), k_{m_2}, \dots, k_n \in K(s), \\ p(i, j) &:= ((s, k_1(i)), \dots, (i, j)) \in P_{s,j}. \end{aligned}$$

Da  $P=P_w$ , ist  $p(i) \in P$ , und es gelten die Gleichgewichtsbedingungen:

Für alle  $i \in \omega_G^-(j)$  gilt:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{p(i)} &\geq \lambda_w \text{ und} \\ \bar{k}_{p(i)} &= \lambda_w, \text{ falls } F_{p(i)} > \emptyset. \end{aligned}$$

Somit folgt, da alle  $p(i)$  ab Knoten  $j$  übereinstimmen, für  $i, l \in \omega_G^-(j)$ :

$$\bar{k}_{p(lj)} \geq \bar{k}_{p(ij)} = \text{const}(j), \text{ falls } F_{p(i)} > \emptyset.$$

Also ist  $\lambda_j^s = \min \{ \bar{k}_{p(ij)} \mid i \in \omega_G^-(j) \}$  eindeutig bestimmt.

Dann gilt aber  $\lambda_j^s \leq \lambda_i^s + k_a$  und  $k_a - \lambda_j^s + \lambda_i^s = \emptyset$ , falls  $H_{ij}^s > \emptyset$ , wie man jetzt leicht einsieht. Mit dem Gleichgewichtspotential  $\hat{\lambda} = -\lambda$  folgt dann die Behauptung.

" $\leq$ ". Sei  $\Delta^{\text{OP}} \in \mathcal{G}(T)$ . Dann folgt mit  $\lambda_w := \lambda_s^s - \lambda_t^s$  für  $w=(s,t) \in W$  die Behauptung.

Außerdem gilt folgender einfache

(I.4.4) SATZ:

*Es gelten die Voraussetzungen des letzten Satzes. Außerdem gebe es genau ein  $H$  mit  $\text{HEG}(T)$ . Dann gibt es  $\in \mathcal{G}(\hat{T})$  mit*

$$\Delta^{\text{OP}}_{F=H}.$$

Beweis:

Wenn  $\in \mathcal{G}(\hat{T})$  existiert, dann folgt aus Satz (I.4.3), daß  $\Delta^{\text{OP}} \in \mathcal{G}(T)$ . Da  $H$  eindeutig bestimmt ist, muß gelten:  $H = \Delta^{\text{OP}}_F$ .

Da jedoch  $\mathcal{G}(\hat{T}) \neq \emptyset$  (vgl. Satz (I.3.12)); folgt die Behauptung.

Im sog. Eingutfall, d.h. wenn es nur eine Quelle gibt, ist  $\text{HEG}(T)$  eindeutig bestimmt, wenn die Kostenfunktionen  $k_a(f, \alpha)$  streng monoton in  $f$  sind. Liegen jedoch mehrere Quellen vor, so lassen sich leicht Beispiele konstruieren, bei denen es nicht eindeutig bestimmte Gleichgewichte gibt.

### I.5 Bestimmung optimaler Parameter in Transportnetzwerken

Wegewahlmodelle sollen das Benutzerverhalten in Transportnetzwerken beschreiben. Da jedoch die individuellen Einzelentscheidungen jedes Benutzers nicht erfaßbar sind, muß ein Modell mit gewissen Mittelwerten arbeiten, in die wiederum Parameter eingehen.

So ist z.B. festzulegen, wann der Durchschnittsbenutzer Straßen und Kreuzungen als überlastet ansieht, wie er Wartezeiten an signalisierten und unsignalisierten Kreuzungen einschätzt oder wie er auf breite und enge Straßen reagiert. Verhaltenskriterien dieser Art lassen sich nicht von vorneherein exakt festlegen. Vielmehr müssen die diese Verhaltenskriterien charakterisierenden Parameter anhand empirisch ermittelter Meßwerte kalibriert werden. Dabei werden die in das Gesamtmodell eingehenden "Teilmodelle" in ihrem Zusammenwirken kalibriert.

Zur mathematischen Formulierung dieser Kalibrierungsaufgabe benötigt man einmal ein Bewertungskriterium  $Z$ , das die Güte der Approximation der empirischen Werte durch die errechneten mißt, und zum anderen eine funktionale Beschreibung des Wegewahlmodelles in Abhängigkeit von den zu untersuchenden Parametern. Wir verwenden im folgenden einen Gleichgewichtsansatz der Form (I.2.10) (3) mit Parameter  $\alpha$ , der in die Kostenfunktionen  $k(\Delta F, \alpha)$  und u.U. in den Ergiebigkeitsvektor  $N$  eingehen kann. Außerdem wird durch Einführung eines "Gleichgewichtsgütefehlers"  $\delta$  berücksichtigt, daß bei vielen praktischen Anwendungen die Ermittlung exakter Gleichgewichte nicht erforderlich ist.

Die Kalibrierung eines Parameters  $\alpha$  wird mathematisch durch das nachfolgende Optimierungsproblem beschrieben.

(I.5.1) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $\sigma > \theta$ . Dann definieren wir

$$L := \{x \in \mathbb{R}^{B(0)} \mid x^t = (\hat{x}^t, \theta^t), \hat{x} \in \mathbb{R}^n, n = \text{Def } \Gamma(0)\}.$$

Sei nun  $\delta = \begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ \theta \end{pmatrix} \in L$ .

Die Optimierungsaufgabe  $P(\delta)$  ist gegeben durch

$$(I.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{(F, \alpha)} Z(F, \alpha) \\ \theta^t c(F, \alpha) = \hat{\delta} \\ \hat{\Gamma} F - \hat{N} = \theta \\ R(\alpha) \leq \theta \\ (F > \theta), \end{array} \right.$$

wobei die Zielfunktion  $Z: \mathbb{F} \times A \rightarrow \mathbb{R}$  und die Restriktionen  $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $m \geq 1$  zweimal differenzierbar in  $\mathbb{F} \times A$  bzw.  $A$  sein sollen.

$\delta$  nennen wir auch (Gleichgewichts-) Niveau.

Wir setzen:

$$(I.5.3) \quad G(F, \alpha) := \begin{bmatrix} \theta^t c(F, \alpha) \\ \hat{\Gamma} F - \hat{N} \end{bmatrix}.$$

Somit lauten die Gleichungsrestriktionen in (I.5.2)

$$(I.5.4) \quad G(F, \alpha) = \delta.$$

Außerdem sei

$$(I.5.5) \quad G_\delta(F, \alpha) := G(F, \alpha) - \delta.$$

Unter relativ schwachen Voraussetzungen läßt sich die Optimierungsaufgabe  $P(\delta)$  in ein Problem ohne Gleichungsrestriktionen überführen.

(I.5.6) DEFINITION:

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und  $\delta \in L$ . Dann setzen wir:

$$D(\delta) := \{(F, \alpha) \in F \times A \mid G(F, \alpha) = \delta, R(\alpha) \leq 0, F > 0\} \text{ und}$$

$$I(\delta) := \{(F, \alpha) \in D(\delta) \mid \det \frac{\partial G}{\partial F}(F, \alpha) \neq 0\}.$$

$D(\delta)$  ist der zulässige Bereich im Optimierungsproblems  $P(\delta)$ , und  $I(\delta)$  bezeichnet diejenigen Punkte aus  $D(\delta)$ , für die die Matrix  $\frac{\partial G}{\partial F}$  invertierbar ist.

Der folgende Satz zeigt, daß  $I(\delta)$  bereits unter leichten Voraussetzungen mit  $D(\delta)$  übereinstimmt.

(I.5.7) SATZ:

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $\delta \in L$  und  $(F^*, \alpha^*) \in D(\delta)$ . Ist dann die in (I.2.16) definierte Matrix  $H(\Delta F^*, \alpha^*) = \begin{bmatrix} \sigma k(\Delta F^*, \alpha^*) \\ \frac{\partial}{\partial f_b} \end{bmatrix}_{a,b}$  positiv semidefinit, so ist  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$ .

Beweis:

Mit der in (I.2.23) definierten positiv definiten Matrix  $\tilde{A}(F^*, \alpha^*)$  gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial F}(F^*, \alpha^*) = \begin{bmatrix} 0^t & \frac{\partial G}{\partial F}(F^*, \alpha^*) \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^t (\tilde{A}(F^*, \alpha^*) + \Delta^t H(\Delta F^*, \alpha^*) \Delta) \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix}$$

Da die Matrix  $\tilde{A}(F^*, \alpha^*) + \Delta^t H(\Delta F^*, \alpha^*) \Delta$  positiv definit ist, folgt wegen Satz (I.1.8) und Bemerkung (I.1.15) die Behauptung.

Im nächsten Kapitel wollen wir untersuchen, wie man die Ableitung  $\frac{dF}{d\alpha}$  berechnen kann. Zunächst ist jedoch die Existenz und Differenzierbarkeit der Abbildung  $\alpha \mapsto F(\alpha)$  zu sichern. Zu diesem Themenkreis gibt es einige Untersuchungen, die jedoch teilweise wesentlich allgemeiner sind als im folgenden Zusammenhang erforderlich. Hierzu sei auf die Arbeiten von BIGELOW/SHAPIRO [54] und DEJON [59] verwiesen. Speziell durch die Einführung des  $\ln$ -Terms in die Kostenfunktion (vgl. (I.1.31)) können die angestrebten Aussagen mit einem Standardsatz der Analysis hergeleitet werden.

(I.5.8) SATZ (über implizite Funktionen):

Seien  $\Gamma \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $\delta \in L$  und  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$ . Die Parametermenge  $A$  sei offen. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U^*$  von  $\alpha^*$  in  $A$  und eine offene Umgebung  $V^*$  von  $F^*$  in  $\mathbb{R}^{B(0)}$  mit folgenden Eigenschaften:

Es gibt genau eine stetige Abbildung  $F_\delta$  von  $U^*$  nach  $V^*$  mit

$$(i) \quad F_\delta(\alpha^*) = F^*,$$

$$(ii) \quad (F_\delta(\alpha), \alpha) \in \mathcal{F} \times A \quad \text{für alle } \alpha \in U^*,$$

$$(iii) \quad G(F_\delta(\alpha), \alpha) = \delta \quad \text{für alle } \alpha \in U^*,$$

(iv)  $F_\delta$  ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{d F_\delta(\alpha)}{d \alpha} = - \left[ \frac{\partial G(F_\delta(\alpha), \alpha)}{\partial F} \right]^{-1} \frac{\partial G(F_\delta(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Wir sagen: Unter den angegebenen Voraussetzungen ist lokal die stetig differenzierbare Abbildung  $F_\delta$  gegeben.

Beweis:

Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen nach ERWE [61]. Wenn  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  und  $A$  offen, dann sind die Funktionen  $k$  in  $\mathbb{R}^{B(0)} \times A$  definiert und stetig differenzierbar. Dann ist aber auch  $G$  auf dieser offenen Menge definiert und stetig differenzierbar, ebenso  $G_\delta$ .

Mit  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$  gilt insbesondere  $G_\delta(F^*, \alpha^*) = 0$ , und die Matrix  $\frac{\partial G}{\partial F}(F^*, \alpha^*) = \frac{\partial G_\delta}{\partial F}(F^*, \alpha^*)$

ist nicht singulär. Die angegebenen Aussagen folgert man nun leicht.

(I.5.9) BEMERKUNG:

Somit läßt sich das Optimierungsproblem  $P(\delta)$  unter den Voraussetzungen des Satzes (I.5.3) wie folgt darstellen:

$$\hat{P}(\delta) \begin{cases} \min_{\alpha} Z(F_\delta(\alpha), \alpha) \\ R(\alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Wir werden im folgenden im wesentlichen nur mit dieser Problemformulierung weiterarbeiten.

ÜBEREINKUNFT: Im Zusammenhang mit dem Problem  $\hat{P}(\cdot)$  nehmen wir immer an, daß  $F_\delta$  existiert und die Eigenschaften (I.5.2) (i) - (iv) besitzt.

# I.6 Zu Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Parameter

Wir betrachten das Problem  $\hat{P}(\delta)$ ,  $\delta \in L$ , für Transportnetzwerke  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$

Wenn durch  $R(\alpha) \leq \theta$  ein kompakter Bereich in  $A$  charakterisiert ist, so existiert mindestens ein Minimum von  $Z$  in diesem Bereich.

Die Existenz eines eindeutig bestimmten Minimums läßt sich für den allgemeinen Fall nicht beweisen; vielmehr muß mit mehreren lokalen Minima gerechnet werden.

Liegt nur ein Parameter  $\alpha$  vor, so wird im folgenden Satz unter relativ starken Voraussetzungen über  $f(\alpha)$  gezeigt, daß  $Z$  strikt konvex in  $\alpha$  ist und damit genau ein Minimalpunkt existiert. Da die Voraussetzungen an die implizit definierte Funktion  $f(\alpha)$  in Anwendungsfällen kaum überprüfbar sind, wird von einer Verallgemeinerung des Satzes (I.6.1) für mehrere Parameter abgesehen.

In der in (I.6.1) speziell definierten Zielfunktion  $Z$  wird berücksichtigt, daß i.a. nur für  $r \leq |B|$  "Meßstellen" Zählwerte  $m_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) vorliegen können.

(I.6.1) SATZ (Eindeutigkeit bei einem Parameter):

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(2)}$  mit  $\sigma > 0$ . Gegeben sei  $\hat{P}(\theta)^*$  mit  $A = \mathbb{R}$ ,

$R = \theta$ ,  $f(\alpha) := \Delta F_\theta(\alpha)$  und  $Z(F, \alpha) := \bar{Z}^n(f(\alpha)) := \frac{r}{\sum_{i=1}^r} (f_i(\alpha) - m_i)^n$

für  $r \in \mathbb{N}$  und  $m_i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

Für alle  $1 \leq i \leq r$  und alle  $\alpha \in A$  gelte:

(i) Es gibt  $\varepsilon > 0$ , so daß  $\left| \frac{d f_i(\alpha)}{d \alpha} \right| > \varepsilon$ .

(ii) Es gibt  $u > 0$ , so daß  $\left| \frac{d^2 f_i(\alpha)}{d \alpha^2} \right| < u$ .

Außerdem gelte:

(iii) Für alle  $\alpha \in A$  gibt es  $1 \leq i \leq r$  mit  $f_i(\alpha) - m_i \neq 0$ .

\*<sub>0</sub> ist der Nullvektor aus  $L$ !

Dann gibt es  $n^* \in \mathbb{N}$ ,  $n^*$  gerade, und  $\alpha^* \in A$ , so daß  $\alpha^*$  eindeutig bestimmtes Minimum von

$$\min_{\alpha \in A} \bar{z}^{n^*}(f(\alpha))$$

ist.

Beweis:

Sei  $z_i^n(\alpha) := (f_i(\alpha) - m_i)^n$ . Wenn für alle  $\alpha \in A$  gilt:  $\frac{d^2 \bar{z}^n(f(\alpha))}{d\alpha^2} > \emptyset$ ,

dann ist  $\bar{z}^n(f)$  strikt konvex in  $A$  und es existiert ein eindeutig bestimmtes Minimum  $\alpha^*(n) \in A$ . Es ist also zu zeigen:

$\frac{d^2 \bar{z}^n(f(\alpha))}{d\alpha^2} > \emptyset$  für alle  $\alpha \in A$ . ( $\bar{z}^n(f(\alpha))$  ist dann streng konvex in  $\alpha$ .)

Nun gilt zunächst an der Stelle  $\alpha \in A$

$$\frac{d^2 \bar{z}^n(f)}{d\alpha^2} = \sum_{i=1}^r \left[ \left( \frac{df_i}{d\alpha} \right)^2 \frac{d^2 z_i^n}{df_i^2} + \frac{dz_i^n}{df_i} \frac{d^2 f_i}{d\alpha^2} \right].$$

Ferner gilt:

$$\frac{dz_i^n}{df_i} = n(f_i(\alpha) - m_i)^{n-1} \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2 z_i^n}{df_i^2} = n(n-1)(f_i(\alpha) - m_i)^{n-2}.$$

Wir setzen:  $A_i := A_i(\alpha) := \left( \frac{df_i(\alpha)}{d\alpha} \right)^2$ ,  $B_i := B_i(\alpha) := \frac{d^2 f_i(\alpha)}{d\alpha^2}$ ;

$d_i := d_i(\alpha) := f_i(\alpha) - m_i$ ;  $s_i^n := s_i^n(\alpha) := n(n-1)d_i^{n-2} A_i + n d_i^{n-1} B_i$ .

Dann gilt an der Stelle  $\alpha \in A$

$$\frac{d^2 \bar{z}^n(f)}{d\alpha^2} = \sum_{i=1}^r s_i^n.$$

$\frac{d^2 \bar{z}^n(f)}{d\alpha^2} > \emptyset$ , wenn für alle  $1 \leq i \leq r$  gilt:  $s_i^n \geq \emptyset$  und für mindestens

ein  $1 \leq i_0 \leq r$  gilt:  $s_{i_0}^n > \emptyset$ .

Sei  $1 \leq j \leq r$  so, daß  $d_j \neq \emptyset$ . Dann ist  $s_j^n > \emptyset$  genau dann, wenn

$$(n-1)A_j + d_j B_j > \emptyset.$$

Diese Ungleichung ist für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  immer erfüllt, denn:

Ist  $d_j B_j > \emptyset$ , so ist nichts zu zeigen.

Ist  $d_j B_j < \emptyset$ , dann gibt es  $K < \emptyset$ , so daß für alle  $\alpha \in A$  gilt:

$K < d_j(\alpha) B_j(\alpha) < \emptyset$ , denn es gilt:  $f(\alpha) \in \mathcal{F}_B$  und  $\mathcal{F}_B$  ist kompakt;

also ist  $d_j(\alpha) = f_j(\alpha) - m_j$  beschränkt.

$B_j(\alpha)$  ist wegen Voraussetzung (ii) beschränkt.

Da  $A_j > \varepsilon^2 > \emptyset$ , wegen Voraussetzung (i), gibt es  $n_j^* \in \mathbb{N}$ , so daß gilt:

$$(n_j^*-1) A_j(\alpha) + d_j(\alpha) B_j(\alpha) > \emptyset$$

für alle  $\alpha \in A$ , falls  $d_j(\alpha) \neq \emptyset$ .

Da  $n_j^*$  unabhängig von  $\alpha \in A$  ist, gilt mit

$n^* := \max \{n_j^* | 1 \leq j \leq r, \text{ es gibt } \alpha \in A \text{ mit } d_j(\alpha) \neq \emptyset\}$

wegen Voraussetzung (iii):

Es gibt für jedes  $\alpha \in A$  mindestens ein  $1 \leq i_0 \leq r$ , so daß  $s_{i_0}^{n^*} > \emptyset$ .

Für alle  $1 \leq j \leq r$  mit  $d_j(\alpha) \neq \emptyset$  ist  $s_j^{n^*} > \emptyset$ . Ist  $d_j(\alpha) = \emptyset$ , so ist  $s_j^{n^*} = \emptyset$ .

Damit ist der Satz bewiesen.

#### (I.6.2) BEMERKUNG:

Da  $x \rightarrow x^{1/n}$  eine monoton wachsende Funktion ist, haben  $\bar{z}^n$  und  $(\bar{z}^n)^{1/n}$  die gleichen Minimalstellen. Da jedoch  $n \rightarrow (\bar{z}^n)^{1/n}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen die entsprechende Tschebyscheffnorm konvergiert, bedeutet Satz (I.6.1) daß  $\hat{P}(\theta)$  unter den angegebenen Voraussetzungen mit der Tschebyscheffnorm ein eindeutig bestimmtes Minimum hat.

(I.6.3) BEMERKUNG:

Mit den im Satz (I.6.1) eingeführten Bezeichnungen gilt:

Für  $n=2$  ist  $\alpha^* \in A$  eindeutiges Minimum von  $\hat{P}(\theta)$ , wenn für alle  $1 \leq i \leq r$  gilt:

$$\left[ \frac{d f_i(\alpha)}{d \alpha} \right]^2 + (f_i(\alpha) - m_i) \frac{d^2 f_i(\alpha)}{d \alpha^2} > 0.$$

Diese im Vergleich zu Satz (I.6.1) leicht abgeschwächte Aussage folgt sofort aus dem Beweis zu (I.6.1).

Leider lassen sich für große Netze die für Eindeutigkeitsaussagen notwendigen Voraussetzungen kaum nachprüfen, da die zweite Ableitung der implizit gegebenen Funktion  $f(\alpha)$  (bzw.  $F(\alpha)$ ) nur sehr schwer zu berechnen ist.

In Abschnitt II.3 wird ein Algorithmus angegeben, der Lösungen von  $\hat{P}(\theta)$  durch sukzessives Lösen von  $\hat{P}(\delta)$  und gleichzeitiges Absenken des Niveaus  $\delta$  (d.h.  $\delta \rightarrow 0$ ) approximiert. Es ist deshalb nicht nur von theoretischem Interesse, wie sich Lösungen von  $\hat{P}(\delta)$  bei Variation von  $\delta$  verhalten. Es gilt folgender einfache Satz:

(I.6.4) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ . Ist für alle  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A$  die in (I.2.16) definierte Jacobimatrix positiv semidefinit, dann gilt:

Für alle  $\delta \in L$  ist  $F_\alpha(\delta)$  durch  $G(F_\alpha(\delta), \alpha) = \delta$  eindeutig bestimmt, und die Abbildung  $\delta \mapsto F_\alpha(\delta)$  ist stetig in  $L$ .

Beweis:

Ähnlich wie im Beweis von Satz (I.5.8) ist auch hier der Satz über implizite Funktionen (ERWE [61]) zu verwenden.

Man beachte Satz (I.5.7).

Im folgenden zitieren wir einige Ergebnisse aus FIACCO [63].

Satz (I.6.7) zeigt insbesondere, daß unter geeigneten Voraussetzungen isolierte lokale Minima der Probleme  $\hat{P}(\delta)$ ,  $\delta \in L$ , gegen ein isoliertes lokales Minimum von  $\hat{P}(\delta)$  konvergieren.

(I.6.5) DEFINITION:

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(2)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $\delta \in L$ ,  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$  und  $A$  offen. Dann ist  $F_\delta: A \rightarrow \mathbb{F}$  definiert. Es liege das Problem  $\hat{P}(\delta)$  vor.

Dann bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha, v, \delta) &:= Z(F_\delta(\alpha), \alpha) + v^t R(\alpha) \text{ die Lagrangefunktion zu } \hat{P}(\delta), \\ \mathcal{K}^{(1)}(\delta) &:= \{(\alpha, v) \in A \times \mathbb{R}_+^m \mid (F_\delta(\alpha), \alpha) \in \mathcal{F} \times A, R(\alpha) \leq 0, \\ &\quad v^t R(\alpha) = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}(\alpha, v, \delta) = 0\} \end{aligned}$$

die Menge der Kuhn-Tucker-Punkte erster Ordnung und

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(2)}(\delta) &:= \{(\alpha, v) \in \mathcal{K}^{(1)}(\delta) \mid \text{Für alle } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } y \neq 0 \text{ und} \\ &\quad y^t \frac{d}{d\alpha} R_i(\alpha) \geq 0 \ (1 \leq i \leq m, R_i(\alpha) = 0) \\ &\quad y^t \frac{d}{d\alpha} R_i(\alpha) = 0 \ (1 \leq i \leq m, v_i > 0) \end{aligned}$$

gilt:

$$y^t \nabla^2 \mathcal{L}(\alpha, v, \delta) y > 0 \quad *)$$

die Menge der Kuhn-Tucker-Punkte zweiter Ordnung.

(I.6.6) SATZ (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für ein isoliertes lokales Minimum von  $\hat{P}(\delta)$ ):

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(2)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $\delta \in L$ ,  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$  und  $A$  offen.

Es liege das Problem  $\hat{P}(\delta)$  vor.

$\alpha^* \in A$  ist isoliertes lokales Minimum von  $Z(F^*(\alpha), \alpha)$ , wenn es  $v^* \in \mathbb{R}_+^m$  gibt, so daß

$$(\alpha^*, v^*) \in \mathcal{K}^{(2)}(\delta).$$

\*)  $\nabla^2 \mathcal{L}$  bezeichne die Hessematrix von  $\mathcal{L}$  bzgl. der Parameter  $\alpha$ .

Beweis:

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist  $\hat{P}(\delta)$  definiert. Dann folgt die Aussage des Satzes aus Lemma 2.1 bei FIACCO [63].

(I.6.7) SATZ (Sensitivität isolierter lokaler Minima zweiter Ordnung von  $\hat{P}(\delta)$  bei  $\delta$ -Variation):

(C) Seien  $\Gamma \in \mathcal{T}^{(2)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $\delta \in L$ ,  $(F^*, \alpha^*) \in I(\theta)$  und  $A$  offen. Es liegen die Probleme  $(\hat{P}(\delta))_{\delta \in L}$  vor.

(i)  $\alpha^*$  sei lokales Minimum von  $\hat{P}(\theta)$  und es gelte:

Es gibt  $v^* \in \mathbb{R}_+^m$  mit  $(\alpha^*, v^*) \in \mathcal{K}^{(2)}(\theta)$

(ii) Für alle  $1 \leq i \leq m$  mit  $R_i(\alpha^*) = \emptyset$ , seien  $\frac{\partial}{\partial \alpha} R_i(\alpha^*)$  linear unabhängig.

(iii) Für alle  $1 \leq i \leq m$  mit  $R_i(\alpha^*) = \emptyset$  gilt  $v_i^* > 0$ .

Dann gilt:

(a)  $\alpha^*$  ist isoliertes lokales Minimum von  $\hat{P}(\theta)$  und  $v^*$  ist eindeutig bestimmt.

(b) Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  ist die Abbildung

$$\delta \mapsto (\alpha(\delta), v(\delta)) \in \mathcal{K}^{(2)}(\delta)$$

definiert und stetig differenzierbar, falls  $\delta \in L$

und  $\|\delta\| < \varepsilon$ . Außerdem gilt:  $(\alpha(\theta), v(\theta)) = (\alpha^*, v^*)$ , und

$\alpha(\delta)$  ist isoliertes lokales Minimum von  $\hat{P}(\delta)$  mit eindeutig definiertem  $v(\delta)$ .

(c) Für alle  $1 \leq i \leq m$  mit  $R_i(\alpha(\delta)) = \emptyset$  gilt  $v_i(\delta) > 0$ .

Beweis:

Siehe Theorem 2.1 in FIACCO [63].

## Kapitel II

### Numerische Methoden zur Berechnung optimaler Parameter in Transportnetzwerken

Wir wollen uns nun mit Methoden zur Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\hat{P}(\theta): \quad \min_{\alpha \in A} Z(F(\alpha), \alpha) \\ R(\alpha) \leq \theta$$

beschäftigen. Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung  $\alpha \mapsto F(\alpha)$  implizit über  $G(F(\alpha), \alpha) = \theta$  gegeben ist. Wie schon in der Einleitung erwähnt, werden wir uns auf Lösungsmethoden beschränken, die die Bestimmung des Gradienten

$$g := \frac{dZ}{d\alpha} = \frac{\partial Z}{\partial F} \frac{dF}{d\alpha} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$$

erfordern. Sind keine Restriktionen  $R(\alpha)$  vorhanden, dann liefert der negative Gradient  $-g$  eine Abstiegsrichtung  $d = d(g) = -g$  für die Zielfunktion  $Z$ . Mit  $d := -g$  lassen sich weitere, methodisch günstigere Abstiegsrichtungen  $\tilde{d}$  konstruieren, wie etwa die konjugierten Gradientenrichtungen oder Richtungen, die sich aus Newton-Ansätzen ergeben (vgl. z.B. BLUM, OETTLI [ 55]). Liegen dagegen Restriktionen  $R(\alpha)$  vor, dann gibt die mathematische Optimierungstheorie eine Reihe von Verfahren an, wie man über den Gradienten zu einer "zulässigen (Abstiegs-)Richtung"  $d = d(g)$  gelangen kann (z.B. die Verfahren der zulässigen Richtungen von Zoutendijk oder die Verfahren der projizierten Gradienten).

Die Bestimmung der aus  $g$  abgeleiteten Richtungen  $d(g)$  ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit von untergeordneter Bedeutung, da hierzu die bekannten Standardansätze verwendet werden können. Hier sollen

zunächst die Probleme, die bei der Bestimmung des Gradienten auftreten, gelöst werden.

Nachdem die Richtung  $d(g)$  ermittelt ist, muß üblicherweise eine Schrittweite  $\tau \in \mathbb{R}_+$  so bestimmt werden, daß gilt:

$$Z(F(\alpha + \tau d(g)), \alpha + \tau d(g)) < Z(F(\alpha), \alpha).$$

Die optimale Lösung dieses Schrittweitenproblems ist bei den in der Praxis auftretenden Dimensionen von  $G(F, \alpha)$  extrem aufwendig, da hierzu u.U. eine Vielzahl von Funktionsauswertungen  $F(\alpha + \tau d(g))$  erforderlich ist. D.h. es ist zu mehreren  $\tau$ -Werten ein Gleichgewichtsfluß  $F(\alpha + \tau d(g))$  zu berechnen. In den meisten Anwendungen wird man deshalb einen "suboptimalen"  $\tau$ -Wert durch Abtasten einiger weniger  $\tau$ -Werte gewinnen. (Meist wird man sogar versuchen, mit einem einzigen Wert auszukommen, da eine hohe Genauigkeit der zu bestimmenden Parameter nicht angestrebt wird.) Aus dieser Sicht erscheint es in diesem Zusammenhang nicht erforderlich, das Schrittweitenproblem weitergehend zu untersuchen. Die eben skizzierten Probleme legen es vielmehr nahe, sich folgenden Fragestellungen zuzuwenden:

1. Wie läßt sich möglichst effizient die Funktion  $F(\alpha)$  auswerten, d.h. wie berechnet man auf möglichst einfache Weise den Gleichgewichtsfluß  $F(\alpha)$ ?
2. Wie läßt sich der Gradient  $g$  und hier insbesondere die Ableitung  $\frac{dF}{d\alpha}$  berechnen?
3. Kann man im Verlaufe eines Optimierungsverfahrens zur Lösung von  $P(\theta)$  auf die exakte (und damit aufwendige) Bestimmung von  $F(\alpha)$  verzichten?

Diese Fragen bestimmen auch den Inhalt der folgenden Abschnitte.

## II.1 Gleichgewichtsalgorithmen

In den vergangenen Jahren erschienen eine Reihe von Arbeiten, die sich mit der numerischen Berechnung von Gleichgewichtsflüssen in Transportnetzwerken befaßten; vgl. etwa [1] bis [10], [12] und NGUYEN in [20] S. 148. Alle in diesen Untersuchungen angegebenen Verfahren beruhen auf der Lösung des assoziierten Optimierungsproblems (I.2.22) (2); man nimmt also an, daß die Jacobimatrix der Kostenfunktionen symmetrisch ist und somit Gleichgewichte als Lösungen von Optimierungsaufgaben charakterisierbar sind (vgl. Satz I.2.22). Einige dieser Ansätze, nämlich alle Verfahren der zulässigen Richtungen, die auf dem Gradienten der assoziierten Zielfunktion  $S(F, \alpha)$  aufbauen, sollen in dieser Arbeit auf ihre Anwendbarkeit für die hier vorliegende spezielle Struktur des Gleichgewichtsproblems  $G(F, \alpha) = \theta$  mit  $\theta > 0$  untersucht werden. Dies erscheint sinnvoll, um eine konsistente Vergleichsbasis zu erhalten. Wir wollen also die von BRAESS [1][2] vorgeschlagenen Verfahren aus unseren Überlegungen ausschließen, da sie auf einer Diskretisierung der Kostenfunktionen [1] bzw. auf einer sukzessiven linearen Approximation der Kostenfunktionen [2] beruhen. Ebenso lassen wir den von WILKIE und STEFANEK [12] angegebenen Ansatz außer Acht, da diese Autoren die hier konstant vorgegebenen Nachfragen durch eine "sehr steile Nachfragenfunktion" approximieren. Untersucht werden also Verfahren, die weder die Kostenfunktionen noch die Nachfragebedingungen verändern. Auf dieser Basis lassen sich dann einige grundsätzliche Überlegungen zum theoretischen Vergleich des Rechenaufwandes der einzelnen Verfahren im Fall  $\theta > 0$  anstellen.

### II.1.1 Klassifikation der Gleichgewichtsalgorithmen

Die von den Autoren [3] bis [10] und von NGUYEN in [20] S. 148 vorgeschlagenen Gleichgewichtsverfahren beruhen auf verschiedenen Problemformulierungen und Ausführungsvorschriften. Im einzelnen unterscheiden sie sich durch folgende Merkmale:

#### A. Eigenschaften des Transportnetzwerkes

(i) Typ des Graphen  $G'$  im Transportnetzwerk  $T$ .

Ist  $G'=G(W,G)$ , so liegt eine Knoten-Bogen-Formulierung des Gleichgewichtsproblems vor. Ist  $G'=G(W,P)$ , so sprechen wir von der Weg-Bogen-Formulierung.

(ii) Typ der eingehenden Kostenfunktionen  $c=\bar{c}+\Delta^t k$ .

Es ist zu unterscheiden, ob  $\sigma=0$  oder  $\sigma>0$  ist und ob die Kosten  $k_a$  des Bogens  $a$  nur vom Bogenfluß  $f_a$  oder auch von Flüssen  $f_b$  in anderen Bögen  $b$  abhängen.

#### B. Eigenschaften der Algorithmen

(iii) Methode.

Bestimmung der Abstiegsrichtung und der Schrittweite.

(iv) Dekompositionsgrad.

Man kann die Abstiegsrichtung für alle Variablen oder sukzessive für Teile der Variablen bestimmen.

(v) Abbruchkriterium.

Es ist festzulegen, wann das Verfahren beendet wird.

Für die folgende Untersuchung werden alle Verfahren so formuliert, daß sie sich nur noch bzgl. der  $G'$ -Typen und der angewandten Methoden unterscheiden. Insbesondere werden auch  $k_a$

so gewählt, daß  $k_a$  nur von  $f_a$  und nicht vom Flußvektor  $f$  abhängt. Außerdem lassen sich alle Verfahren nach Quellen dekomponieren, so daß bei einem Verzicht auf ein Abbruchkriterium (für diese theoretische Untersuchung) alle Verfahren auf einer gemeinsamen Vergleichsbasis stehen.

Die Methoden werden so beschrieben, daß sie sowohl in  $G(W,G)$  als auch in  $G(W,P)$  anwendbar sind. Bei den folgenden Überlegungen stehen die methodischen Aspekte der einzelnen Verfahren (Bestimmung von Abstiegsrichtungen) im Vordergrund. Wir folgen dabei der Vorgehensweise von NGUYEN in [20], S. 148. Die Streuparameter  $\sigma(s)$  können zunächst Null oder größer als Null sein.

Gegeben sei ein Transportnetzwerk  $TE \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma \geq 0$ . Es soll das Optimierungsproblem (I.2.22) (2)

$$\min_{F \in \mathcal{F}} S(F, \alpha)$$

gelöst werden. Eine Lösung dieser Aufgabe liefert folgender grundlegende Algorithmus:

(II.1.1) ALGORITHMUS:

(0) Sei  $F^{(0)} \in \mathcal{F}$ . Setze  $k := 0$ .

(1) Ist  $F^{(k)}$  optimal, dann STOP. Sonst gehe nach (2).

(2) Wähle eine Abstiegsrichtung  $d^{(k)}$  in  $F^{(k)}$ , so daß gilt:

(i)  $(d_a^s)^{(k)} = 0$  für  $s \neq k$ ,  $s \in U$ ,  $a \in B(s)$ ,

(ii)  $\Gamma d^{(k)} = 0$ .

(iii) Wenn  $(F_a^s)^{(k)} \neq 0$ , dann gilt  $(d_a^s)^{(k)} \geq 0$  für  $s = k$ ,  $a \in B(s)$ .

(iv)  $(\frac{\partial S(F^{(k)}, \alpha)}{\partial F^{(k)}})^t d^{(k)} < 0$ .

(3) Bestimme eine Schrittweite  $\tau^{(k)} \in \mathbb{R}_+$ , so daß

$$S(F^{(k)} + \tau^{(k)} d^{(k)}, \alpha) < S(F^{(k)}, \alpha).$$

(4) Setze  $F^{(k+1)} := F^{(k)} + \tau^{(k)} d^{(k)}$ ,  $k := (k+1) \pmod{|O|}$  und  
gehe nach (1).

Im Fall  $\sigma > 0$  ist die Bedingung (2)(iii) überflüssig, da  $F > 0$ .

Die Schrittweite  $\tau^{(k)}$  wird meist so bestimmt, daß gilt:

$$S(F^{(k)} + \tau^{(k)} d^{(k)}) = \min\{S(F^{(k)} + \tau d^{(k)}, \alpha) \mid 0 \leq \tau, F^{(k)} + \tau d^{(k)}\} \text{ zulässig.}$$

In vielen praktischen Anwendungen begnügt man sich jedoch schon mit einer suboptimalen Schrittweite  $\tau^{(k)}$ , wie in (3).

Im Fall  $\sigma > 0$  ist bei der Schrittweitenbestimmung keine Zulässigkeitsbedingung erforderlich, da der  $\ln$ -Term in den Kostenfunktionen verhindert, daß der zulässige Bereich verlassen wird (vgl.

z.B. auch Barrieremethoden). Hierzu der folgende Satz:

(II.1.2) SATZ:

Es gelten die eingeführten Bezeichnungen und es sei  $\sigma > 0$ .

Ist  $F^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{B(O)}$  mit

$$S(F^{(k+1)}, \alpha) = \min_{\tau \in \mathbb{R}_+} S(F^{(k)} + \tau d^{(k)}, \alpha),$$

dann ist  $F^{(k+1)} \in \mathcal{F}$ .

NGUYEN gibt in [20], S. 148 zwei Typen mathematischer Optimierungsverfahren an, aus denen ein großer Teil der bekannten Gleichgewichtsverfahren ableitbar sind, nämlich den Frank-Wolfe-Algorithmus und simplexähnliche Methoden.

Der Frank-Wolfe-Ansatz: (FW-Ansatz)

Die Abstiegsrichtung  $d$  (wir lassen den Iterationsindex im folgenden weg) ergibt sich aus der Lösung des linearisierten Problems

$$(II.1.3) \quad \min_Y \left( \frac{\partial S(F, \alpha)}{\partial F} \right)^t Y$$

$$\Gamma Y = N \quad (Y \geq 0)$$

wobei gilt:  $d := Y - F$ .

Aus der Netzwerktheorie ist bekannt, daß die Komponenten  $Y^S$  einen Fluß auf einem Spannbaum sind, der (unter den Kosten  $\frac{\partial S(F, \alpha)}{\partial F}$ ) alle kürzesten Wege von der Quelle  $s$  zu allen Zielen  $t \in D$  enthält. Man sagt,  $Y$  ist das Ergebnis einer Best-Weg-Umlegung unter den momentanen Wegkosten; vgl. etwa HENSEL [47]. Lösen von (II.1.3) bedeutet also, daß man im zugrundeliegenden Graphen  $G(!)$  zu jeder Quelle die kürzesten Wege zu allen Zielen bestimmt. Diese so gefundenen Wege werden dann mit den nachgefragten Fahrten (= Komponenten von  $N$ ) belastet.

Für den Fall  $\sigma=0$  behandeln BRUYNOOGHE et al. [3] in ihrem Algorithmus 1 für  $G(W, P)$  und LEBLANC et al. [7] für  $G(W, G)$  Algorithmen, die sich aus dem Ansatz (II.1.3) ableiten lassen. Der "primal-duale" Algorithmus von PETERSEN [10] weist gewisse Ähnlichkeiten mit dem FW-Ansatz auf, obgleich er hier nicht einzuordnen ist. Es werden nämlich dort statt der kürzesten Wege die Kosten der kürzesten Wege zwischen allen Quell-Ziel-Paaren ermittelt (duales Problem).

Anschließend ist für eine Quelle  $s \in O$  ein primales Problem vom Typ

$\min_{F^S \text{ zulässig}} S(F, \alpha)$  zu lösen; hierzu gibt PETERSEN jedoch kein Verfahren an.

### Simplexähnliche Ansätze

Es wird davon ausgegangen, daß sich die Bogenmengen  $B(s)$  disjunkt in  $I(s)$  und  $J(s)$  so zerlegen lassen, daß bei entsprechender Aufteilung von  $d^s$  in  $d_{I(s)}$  und  $d_{J(s)}$  und ebenso von  $\hat{r}(s)$  in  $\hat{r}_{I(s)}$  und  $\hat{r}_{J(s)}$  (d.h. es werden jeweils diejenigen Spalten von  $\hat{r}$  ausgewählt, deren Indizes zu  $I(s)$  bzw.  $J(s)$  gehören und zu den Matrizen  $\hat{r}_{I(s)}$  bzw.  $\hat{r}_{J(s)}$  zusammengefaßt) gilt:

(1)  $\hat{r}_{I(s)}$  ist invertierbar,

(2)  $d_{I(s)} = -\hat{r}_{I(s)}^{-1} \hat{r}_{J(s)} d_{J(s)}$ ,

(3)  $d_{J(s)}$  ist so zu bestimmen, daß gilt:

$$\gamma_{J(s)} d_{J(s)} \leq 0, \text{ wobei}$$

$$\gamma_{J(s)} := \left( \frac{\partial S}{\partial F} \right)_{J(s)}^t - \left( \frac{\partial S}{\partial F} \right)_{I(s)}^t \hat{r}_{I(s)}^{-1} \hat{r}_{J(s)},$$

(4) Für  $a \in I(s) \cup J(s)$  muß gelten:

$$\text{Ist } F_a^s = 0, \text{ dann } d_a^s \geq 0.$$

$I(s)$  kennzeichnet die sog. basischen,  $J(s)$  die nicht-basischen Variablen. Aus der Netzwerktheorie ist bekannt, daß die basischen Variablen  $I(s)$  einen Spannbaum mit Wurzel  $s$  in  $G(s)$  bestimmen (vgl. etwa [53][66]). Fügt man zu einem solchen Spannbaum einen nicht-basischen Bogen  $a \in J(s)$  hinzu, dann wird durch ihn ein Zyklus geschlossen. Die Menge aller derartig gebildeten Zyklen ergeben eine Zykelbasis. Die Komponenten von  $\gamma_{J(s)}$  sind die Kosten dieser Zyklen (vgl. NGUYEN [9]).

In  $G(W, G)$  gilt: Ist  $a = (i, j) \in J(s)$ , dann gibt es in dem zu  $I(s)$  gehörigen Spannbaum zwei Wege  $p(i) \in P_{si}$  und  $p(j) \in P_{sj}$  und der durch  $(i, j)$  im Spannbaum geschlossene Zyklus hat die Kosten

$$\gamma_a^s = c_a^s + c_{p(i)}^s - c_{p(j)}^s,$$

wobei  $c_{p(i)}^s$  bzw.  $c_{p(j)}^s$  die Kosten der Wege  $p(i)$  bzw.  $p(j)$  sind.

In  $G(W, P)$  besteht der zu  $I(s)$  gehörige Spannbaum aus je einem Bogen von  $s$  zu allen  $t \in D$ . Ein Zyklus wird dann durch jeweils einen weiteren Bogen geschlossen. Ist also  $a \in P_w$  und  $a \in J(s)$ , dann besteht der durch  $a$  geschlossene Zyklus aus  $a$  und  $b$ , wobei  $b \in P_w$  Spannbaumbogen sei. Es gilt dann:

$$\gamma_a^s = c_a^s - c_b^s = c_p - c_q$$

(wenn die Bogen  $a$  und  $b$  die Wege  $p$  und  $q$  repräsentieren).

Da  $\gamma_{J(s)}$  i.a. einfach (durch Summieren über einen Zyklus) zu berechnen ist, bestimmt man zunächst  $d_{J(s)}$  nach einer der unten angegebenen Vorschriften und berechnet anschließend  $d_{I(s)}$  gemäß (2). Im folgenden werden zwei solcher Vorschriften zur Bestimmung von  $d_{J(s)}$  angegeben.

#### (II.1.4) Die modifizierte reduzierte Gradientenmethode

(MRG-Ansatz):

$$d_a^s := \begin{cases} -\gamma_a^s, & \text{falls } \gamma_a^s < 0 \\ -\gamma_a^s F_a^s, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieser Ansatz entspricht einem Gesamtschrittverfahren, während der folgende auf dem Einzelschrittgedanken aufbaut.

#### (II.1.5) Die konvexe -Simplex-Methode

(CS-Ansatz): Für  $b, t \in J(s)$

$$\text{Seien } \gamma_b^s := \min_{a \in J(s)} \gamma_a^s \text{ und } \gamma_t^{sF_t} := \max_{a \in J(s)} \gamma_a^{sF_t}.$$

Dann gilt:

- (i) Wenn  $|\gamma_b^s| = \gamma_t^{sF_t} = 0$ , dann sei  $d^s = 0$ .
- (ii) Wenn  $|\gamma_b^s| \geq \gamma_t^{sF_t}$ , dann  $b^s = 1$  und  $d_a^s = 0$  für alle  $a \neq b, a \in J(s)$ .
- (iii) Sonst:  $d_t^s = -1$  und  $d_a^s = 0$  für alle  $a \neq b, a \in J(s)$ .

Für  $G' = G(W, G)$  und  $\sigma = 0$  ist der CS-Ansatz bereits von NGUYEN [9] behandelt worden. Der MRG-Ansatz wird von NGUYEN in [20] S. 148 angegeben, jedoch nicht weiter erläutert.

Für  $G' = G(W, P)$  und  $\sigma = 0$  ist der CS-Ansatz von DAFERMOS/SPARROW [4] und DAFERMOS [5] behandelt worden. (Man wähle pro Quell-Ziel-Paar als basische Variable diejenige, die zum teuersten belegten Weg gehört.) Für den MRG-Ansatz führt NGUYEN in [20], S. 148 einen Algorithmus an, den er nach einem Gedanken von LEVENTHAL et al. [8] so modifiziert, daß er im Verlaufe des Iterationsprozesses die Wegmenge  $P$  durch Kürzest-Weg-Suche erzeugt. Algorithmus 2 von BRUYNOOGHE et al. [3] läßt sich ebenfalls hier einordnen.

Die Übertragbarkeit dieser Algorithmen auf den Fall  $\sigma > 0$  wird in Abschnitt II.1.3 weitergehend untersucht.

### II.1.2 Drei weitere Gleichgewichtsalgorithmen

Ergänzend zu den oben angegebenen gekannten Gleichgewichtsverfahren, sollen im folgenden noch drei weitere Ansätze behandelt werden, die sich speziell für den Fall  $\sigma > 0$  eignen.

#### Das Verfahren der projizierten Gradienten (PG-Ansatz)

Wir berufen uns im folgenden auf den von LUENBERGER [67] S. 249 angegebenen Algorithmus. Obwohl es bei der Lösung von (I.2.22)(2) naheliegt, auch das projizierte Gradientenverfahren zu untersuchen, sind dem Autor bisher keine Arbeiten in dieser Richtung bekannt. Hierfür gibt es einsichtige Gründe: Im Fall  $\sigma = 0$ , der ja bisher ausschließlich in der Literatur behandelt wurde, ist einmal, je

nach Stand der aktiven Restriktionen, eine ständig wechselnde Projektionsmatrix (in  $G(W,G)$  mit relativ hoher Dimension) zu ermitteln und zum andern ist darauf zu achten, daß der zulässige Bereich nicht verlassen wird. Beides ist relativ aufwendig.

Im Fall  $\sigma > 0$  ist  $F > 0$ , so daß zu den Gleichungsrestriktionen

$\hat{F}F = \hat{N}$  keine weiteren aktiven Restriktionen treten.

Ist  $G' = G(W,G)$ , so gilt dann nämlich für die Projektionsmatrizen  $P(s)$  zu  $s \in O$ :

$$(II.1.6) \quad P(s) = E - \hat{F}^t(s) (\hat{F}(s) \hat{F}^t(s))^{-1} \hat{F}(s)^*,$$

und die Abstiegsrichtung  $d^S$  erhält man durch

$$(II.1.7) \quad d^S = - P(s) \frac{\partial S(F, \alpha)}{\partial F}$$

Im Fall  $G' = G(W,P)$  ist die Berechnung von  $P(s)$  bzw. der Quell-Ziel-Paar-Blöcke  $P(s,t)$  ( $t \in D$ ) in  $P(s)$  einfacher, denn es gilt:

$$(II.1.8) \quad P(s,t) = E - \frac{1}{|P_{st}|} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } P(s) = \text{diag}(P(s,t))_{t \in D}^*.$$

( $P(s,t) \cdot x$  bewirkt, daß von jeder Komponente von  $x$  der Mittelwert der Komponenten von  $x$  subtrahiert wird.)

Außerdem kann im Fall  $\sigma > 0$  auf die Bestimmung einer oberen Schrittwertengrenze verzichtet werden; vergleiche Satz (II.1.2).

Der reduzierte Gradienten-Ansatz (RG-Ansatz)

Da  $\hat{F} \theta = \theta$ , läßt sich für  $F \in \mathbb{R}^{B(0)}$  die Lösung der Gleichung

$$\hat{F} F = \hat{N}$$

folgendermaßen schreiben:

$$F = \theta J + F_0,$$

wobei  $J \in \mathbb{R}^{\text{Ker} \hat{F}}$  und  $F_0$  eine partikuläre Lösung von  $\hat{F} F = \hat{N}$  ist.

\*)  $E$  sind die "passenden" Einheitsmatrizen

Das Optimierungsproblem  $\min_{F \in \mathcal{F}} S(F, \alpha)$  lautet dann:

$$(II.1.9) \quad \min_{J \in \mathbb{R}^{\widehat{\text{Ker}} \Gamma}} S(\Theta J + F_0, \alpha),$$

$$\Theta J + F_0 \geq \theta.$$

Für den Gradienten von  $S$  bzgl.  $J$  gilt:

$$(II.1.10) \quad \frac{\partial S(\Theta J + F_0, \alpha)}{\partial J} = \Theta^t \frac{\partial S(\Theta J + F_0, \alpha)}{\partial F} = \Theta^t c(F, \alpha)$$

Im Fall  $\sigma > \theta$  kann (II.1.9) mit einem einfachen Gradientenverfahren gelöst werden, da bei der Bestimmung der Schrittweite die Zulässigkeit des neuen Iterationspunktes gesichert ist (vgl. Satz (II.1.2)).

Zwischen dem projizierten Gradienten  $P \cdot c$  aus (II.1.7) und  $\frac{\partial S}{\partial J}$  besteht folgender einfache Zusammenhang:

$$(II.1.11) \quad \frac{\partial S}{\partial J} = \Theta^t c = \Theta^t P c.$$

Der Fixpunktansatz (FIX-Ansatz)

Die folgenden Überlegungen gelten nur für den Fall  $\sigma > \theta$ . Mit den Gleichungen (I.2.10)(4) soll durch eine abgewandelte Fixpunktiteration eine Abstiegsrichtung für das Optimierungsproblem  $\min_{F \in \mathcal{F}} S(F)$  ermittelt werden. . . nächst wollen wir anhand eines Beispiels klären daß die (reine) Fixpunktiteration

$$(II.1.12) \quad F^{(i+1)} = \phi(F^{(i)}, \lambda^{(i+1)}, \alpha) \\ \Gamma F^{(i+1)} = N$$

i.a. nicht zu einer Lösung von (I.2.10)(4) führt.

(II.1.13) BEISPIEL:

Gegeben sei das Transportnetzwerk des Beispiels (I.3.15), jedoch mit Kostenfunktionen (ohne  $\alpha$ )  $k_a(F) = F_a$  und  $k_b(F) = F_b^3$ , der Nachfrage  $N = (\frac{2}{-2})$  und  $\sigma = 1$ . ( $\lambda$  kann hier eliminiert werden!)

Dann gilt nach (I.2.12):

$$\phi_a(F) = \phi_a(F_a) = \frac{2 e^{-F_a}}{e^{-F_a} - (2 - F_a)^3}$$

Man rechnet leicht nach, daß (mit Rundungsfehlern) gilt:

$$(II.1.14) \quad \begin{aligned} 1.989 &= \phi_a(0.241) \\ 0.241 &= \phi_a(1.989) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (II.1.14) legen nahe, daß die Fixpunktiteration (II.1.12) i.a. nicht konvergiert.

Im folgenden wird jedoch gezeigt, daß die "Fixpunkttrichtung"

$d^{(i)} := \phi(F^{(i)}, \lambda^{(i+1)}, \alpha) - F^{(i)}$  eine Abstiegsrichtung zu (I.2.22) (2) liefert und daß nach Wahl einer geeigneten Schrittweite  $\beta^{(i)} \in (0, 1]$  die folgende Iterationsvorschrift

$$(II.1.15) \quad F^{(i+1)} = F^{(i)} + \beta^{(i)} d^{(i)} = F^{(i)} + \beta^{(i)} (\phi(F^{(i)}, \lambda^{(i+1)}, \alpha) - F^{(i)})$$

eine Folge  $(F^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugt, die gegen ein  $F \in G(T)$  konvergiert.

Man beachte, daß für  $\beta^{(i)} = 1$  die Formel (II.1.15) in (II.1.12) übergeht.

(II.1.16) SATZ (Bestimmung einer Abstiegsrichtung):

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ . Die Jacobimatrix  $H(f, \alpha)$  sei positiv semidefinit und symmetrisch für alle  $f \in \mathbb{R}_+^B$  und  $\alpha \in A$ . Gegeben sei das strikt konvexe Optimierungsproblem (I.2.22) (2), d.h.

$$\min_{F \in \mathcal{F}} S(F, \alpha).$$

Für  $\hat{F} \in G(T)$  liefert dann der folgende Algorithmus eine Abstiegsrichtung  $d = d(\hat{F}, \alpha)$  zu (I.2.22) (2):

(1) Berechne  $k_{ij}(\Delta^{\cup \hat{F}}, \alpha)$  für alle  $(i, j) \in B$

(2) Bestimme für  $s \in O$  und  $l \in K$  die "Potentiale"  $\lambda_l^s = \lambda_l^s(\hat{F}, \alpha)$ ,  
so daß gilt:

$$\Gamma \phi(\hat{F}, \lambda(\hat{F}, \alpha), \alpha) = N$$

(3) Setze  $d(\hat{F}, \alpha) = \phi(\hat{F}, \lambda(\hat{F}, \alpha), \alpha) - \hat{F}$ .

# Beweis:

Wir müssen zeigen, daß gilt:

$$\left[ \frac{\partial S(\hat{F}, \alpha)}{\partial F} \right]^t d(\hat{F}, \alpha) < \theta,$$

d.h.

$$c(\hat{F}, \alpha)^t d < \theta.$$

Wir setzen zur Abkürzung  $\hat{\phi} := \phi(\hat{F}, \lambda(\hat{F}, \alpha), \alpha)$ .

Dann gilt:

$$\tilde{c}(\hat{\phi}, \alpha) + \Delta^t k(\Delta \hat{F}, \alpha) = \Gamma^t \lambda(\hat{F}, \alpha).$$

Somit:

$$\begin{aligned} c(\hat{F}, \alpha)^t d &= \tilde{c}(\hat{F}, \alpha)^t d + \Delta^t k(\Delta \hat{F}, \alpha) d = \\ &= [\tilde{c}(\hat{\phi}, \alpha) + \Delta k(\Delta \hat{F}, \alpha)]^t d - [\tilde{c}(\hat{\phi}, \alpha) + \tilde{c}(\hat{F}, \alpha)]^t d \\ &= \lambda^t(\hat{F}, \alpha) \Gamma d - [\tilde{c}(\hat{\phi}, \alpha) - \tilde{c}(\hat{F}, \alpha)]^t (\hat{\phi} - \hat{F}) < \theta. \end{aligned}$$

Man sieht dies sofort ein, da  $\Gamma d = \theta$  ist und der zweite Term wegen der Isotonie von  $\tilde{c}(F, \alpha)$  in  $F$  positiv ist.

Im Fall  $G' = G(\mathcal{N}, P)$  läßt sich eine Abstiegsrichtung somit nach folgender Formel ermitteln (vgl. I.2.11):

$$d_P = \frac{N_w e^{-\frac{1}{\sigma(s)}} \bar{k}_P(F, \alpha)}{\underbrace{\quad}_{qep_w} e^{-\frac{1}{\sigma(s)}} \bar{k}_Q(F, \alpha)} - F_P$$

für  $p \in p_{st}$ .

Für  $G' = G(W, G)$  lassen sich die Potentiale  $\lambda$  in (II.1.16) (2) über das Optimierungsproblem (I.3.4) ermitteln!

Auf dem FIX-Ansatz aufbauend, ergibt sich folgender

(II.1.17) ALGORITHMUS: (ALGS)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes (II.1.16).

$\alpha \in A$  sei fest. Die Menge der Quellen  $O$  sei numeriert und werde im folgenden zyklisch durchlaufen.

(0) Bestimme  $F^{(0)} \in \mathcal{F}$ .

Ist  $F^{(0)} \in \mathcal{G}(T)$ , dann STOP.

Sonst  $s := \emptyset$ , gehe nach (1).

(1) Bestimme die Abstiegsrichtung durch

$$(d_{ij}^t)^s = \begin{cases} \phi_{ij}^s(F^{(s)}, \lambda(F^{(s)}, \alpha), \alpha) - F_{ij}^{(s)}, & t=s, (i,j) \in B(s) \\ \emptyset, & t \neq s, (i,j) \in B(t) \end{cases}$$

(2) Bestimme die Schrittweite  $\hat{\beta}^{(s)} > \emptyset$  mit einem geeigneten Verfahren <sup>\*)</sup>.

(3) Setze

$$(F_{ij}^t)^{(s+1)} := \begin{cases} (F_{ij}^s)^{(s)} + \hat{\beta}^{(s)} (d_{ij}^s)^{(s)}, & t=s, (i,j) \in B(s) \\ (F_{ij}^t)^s, & t \neq s, (i,j) \in B(t) \end{cases}$$

Ist  $F^{(s+1)} \in \mathcal{G}(T)$ , dann STOP.

Sonst  $s := (s+1) \pmod{|O|}$ , gehe zu (1).

(II.1.18) KONVERGENZSATZ:

Unter den Voraussetzungen des Satzes (II.1.16) konvergiert die vom Algorithmus (II.1.17) erzeugte Folge  $(F^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  gegen  $\hat{F} \in \mathcal{G}(T)$ .

<sup>\*)</sup> siehe z.B. ZANGWILL [72] oder LUENBERGER [67]

Beweis:

Wir verwenden Theorem A aus ZANGWILL [ 72] S. 91. Alle Punkte  $F^{(i)}$  liegen in der kompakten Menge  $\mathcal{F}$ . Ist  $\hat{F} \in \mathcal{G}(T)$ , so kann man  $S$  mit dem angegebenen Algorithmus echt verkleinern. Ist  $\hat{F} \in \mathcal{G}(T)$  so bricht der Algorithmus ab. Außerdem ist die Abbildung  $F^{(i)} \rightarrow F^{(i+1)}$  stetig, also auch abgeschlossen. Damit sind alle Voraussetzungen des Theorems A von ZANGWILL erfüllt.

(II.1.19) BEMERKUNGEN:

Algorithmus (II.1.17) arbeitet alle Quellen zyklisch ab. Liegt dem Transportnetzwerk  $T$  ein Weggraph zugrunde, so kann man statt nach Quellen auch nach Quell-Ziel-Paaren dekomponieren (vergleiche z.B. DAFERMOS [5]). Das Verfahren (II.1.17) arbeitet sowohl in  $G(W,G)$  als auch in  $G(W,P)$ , wobei allerdings die Menge der Wege in  $P \subset P_W$  fest vorgegeben sein muß.

Algorithmus (II.1.17) läßt sich als sog. primal-duales Verfahren interpretieren, da in (II.1.16)(2) und damit in (II.1.17)(1) erst die dualen Variablen  $\lambda = \lambda(F^{(i)}, \alpha)$  zu bestimmen sind und anschließend ein neuer primaler Iterationspunkt  $F^{(i+1)}$  festgelegt wird. Nur bei zugrundeliegendem Weggraphen liegt ein rein primaler Algorithmus vor, da nun  $\lambda(F^{(i)}, \alpha)$  explizit berechnet und eliminiert werden kann (vergl.(I.2.11)).

Ein empirischer Vergleich von (II.1.17) mit den von DAFERMOS [5] und NGUYEN [9] vorgeschlagenen Algorithmen findet sich in Abschnitt III.2.4.

### II.1.3 Gegenüberstellung der Gleichgewichtsalgorithmien für $\sigma > 0$

Wir wollen nun klären, inwieweit die in II.1.1 und II.1.2 dargestellten Algorithmen auf den Fall  $\sigma > 0$  übertragbar sind und anschließend alle behandelten Verfahren für  $\sigma > 0$  einander gegenüberstellen.

Ist  $G' = G(W, G)$ , so erkennt man leicht, daß die in II.1.1 angegebenen Algorithmen auch für  $\sigma > 0$  anwendbar sind. Statt mit den Kostenfunktionen  $k_a(\Delta F, \alpha)$  arbeitet man jetzt mit dem Ansatz

$$c_a^s(F, \alpha) = \sigma(s) \ln F_a^s + k_a(\Delta F, \alpha).$$

Für  $G' = G(W, P)$  lassen sich im Fall  $\sigma > 0$  die Algorithmen von II.1.1 nur mit gewissen Einschränkungen übertragen. Da nämlich der  $\ln$ -Term in den Kostenfunktionen

$$c_p(F, \alpha) = \sigma(s) \ln F_p + \overline{\sum_{a \in p}} k_a(\Delta F, \alpha)$$

keinem Bogen im zugrundeliegenden Graphen  $G(!)$  entspricht, können im Verlaufe des Iterationsprozesses die Wege  $P \subset P_W$  nicht durch Kürzest-Weg-Suche generiert werden. (Vergleiche hierzu die Überlegungen von LEVENTHAL et al. [8] oder von NGUYEN in [20] S. 148 für den MRG-Ansatz.) Im Fall  $\sigma > 0$  muß vielmehr die Menge der Wege  $P \subset P_W$  vor Beginn eines jeden Algorithmus bekannt sein.

Bevor wir nun die einzelnen Verfahren zu vergleichen versuchen, seien noch einige positiv zu bewertende Aspekte des Gleichgewichtsansatzes mit  $\sigma > 0$  genannt:

1. Wie in (I.2.22) gezeigt wurde, gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\hat{F} \in \mathcal{F}$ . Im Fall  $\sigma = 0$  ist  $\alpha \hat{F}$  eindeutig bestimmt. Außerdem approximieren für genügend kleines  $\sigma > 0$  diese Lösungen Gleichgewichte mit  $\sigma = 0$ .

2. Bei der Bestimmung der optimalen Schrittweite wird der zulässige Bereich  $\mathcal{F}$  nicht verlassen (vgl. (II.1.16)). Insbesondere sind keine oberen Schranken für die Schrittweitenfaktoren zu bestimmen.
3. Für alle simplexähnlichen Algorithmen (CS, MRG) entfällt die wiederholte Bestimmung einer Basis, da ein belegter Spannbaum immer belegt bleibt. (Es könnte allerdings aus Gründen der Konditionierung von Vorteil sein, wenn die Basis gewechselt wird.)
4. Die Streufaktoren  $\sigma \in \mathbb{R}^0$  erlauben eine Steuerung der "Gleichgewichtsgüte" (vgl. S. 22 und die Ergebnisse von (III.2.4)).

Im folgenden sind die in den Abschnitten II.1.1 und II.1.2 untersuchten Algorithmen, nach  $G'$ -Typen sortiert (Tabelle 1 für  $G'=G(W,G)$ , Tabelle 2 für  $G'=G(W,P)$ ), hinsichtlich ihres erforderlichen Rechenaufwandes einander gegenübergestellt. Dabei werden folgende Abkürzungen verwendet:

- |               |                                                                                                                                                                          |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\rho[Ex; n]$ | = Rechenzeit zur Bestimmung des Maximums (bzw. Minimums) von $n$ gegebenen Zahlen.                                                                                       |
| $\rho[KW(s)]$ | = Rechenzeit zur Bestimmung aller kürzesten Wege von der Quelle $s \in O$ zu allen Zielen $t \in D$ .                                                                    |
| KW            | = Kürzest-Weg-Algorithmus.                                                                                                                                               |
| $\rho[k]$     | = Rechenzeit zur Auswertung aller Funktionen $k_a$ mit $a \in B'$ . $B'$ enthält alle Bogen $a \in B$ , deren Flüsse $f_a$ sich in der letzten Iteration geändert haben. |

|               |                                                                                                        |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\rho_{po}$   | = Rechenzeit für eine Punktoperation (Multiplikation, Division).                                       |
| $\rho_{exp}$  | = Rechenzeit zur Auswertung der Exponentialfunktion plus Rechenzeit für eine Punktoperation.           |
| $\rho_{ln}$   | = Rechenzeit zur Auswertung der Logarithmusfunktion plus Rechenzeit für eine Punktoperation.           |
| $\rho_{schr}$ | = Rechenzeit zur Bestimmung einer (sub-)optimalen Schrittweite.                                        |
| $\rho_{ver}$  | = Rechenzeit für einen Vergleich ( $=, \geq, >$ ).                                                     |
| $z$           | = Anzahl der pro Quelle abgearbeiteten Zyklen bei den CS-Ansätzen                                      |
| $\rho_{FIX}$  | = Rechenzeit zur Lösung des nichtlinearen Gleichgewichtsproblems (I.3.4) beim FIX-Ansatz in $G(W,G)$ . |

| Ansaatz | Kostenfunktions-<br>typ | Ermittlung der Abstiegsrichtung     |                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Schrift-<br>weisen-<br>berech-<br>nung | Wesentlicher Rechenaufwand pro Quelle                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------|-------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|         |                         | 1. Schritt                          | 2. Schritt                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| FW      | $C_a(F, \alpha)$        | KW                                  | Belasten des gefundenen Spannbereichs<br>kürzester Wege zur Quelle seo mit<br>$N = (N^S)_t$ ted ergibt Fluß $F^S(N)$ und damit<br>$d^S := F^S(N) - F^S$                                                                                                                                 | 1                                      | $ B(s)  \cdot \rho_{ln} + \rho_{KW}(s) + \rho_{schr}$                                                                                                                                                                                                                               |
| CS      | $C_a(F, \alpha)$        | einmalige<br>Berechnung<br>von KW   | $\gamma_a^S := \min_{a \in U(s)} \gamma_a^S$<br>$\gamma_b^S = \gamma_{t^S}^S$ , dann $d^S = \theta$<br>$\gamma_b^S \geq \gamma_{t^S}^S$ , dann $d^S = 1, d_a^S = \theta, a \neq b, a \in U(s)$<br>$\gamma_b^S < \gamma_{t^S}^S$ , dann $d^S = -1, d_a^S = \theta, a \neq b, a \in U(s)$ | 2                                      | (einmalige KW-Bestimmung nicht gerechnet)<br>$\{  B(s)  \cdot \rho_{ln} +  J(s)  \cdot \rho_{po} + 2 \cdot \rho[Ex;  J(s) ] + \rho_{ver} + \rho_{schr} \} \cdot z + (z-1) \rho[k]$<br>Je nach Netz und Programmierweise können die Faktoren $ B(s) $ und $ J(s) $ auch kleiner sein |
| MRC     | $C_a(F, \alpha)$        | einmalige<br>Berechnung<br>von KW   | $d_a^S := \begin{cases} -\gamma_a^S & \text{falls } \gamma_a^S < \theta \\ -\gamma_{F^S}^S & \text{sonst} \end{cases}$<br>für $a \in U(s)$                                                                                                                                              | 1                                      | (einmalige KW-Bestimmung nicht gerechnet)<br>$ B(s)  \cdot \rho_{ln} + x \cdot \rho_{ver} + y \cdot \rho_{po} + \rho_{schr}$ wobei $x+y =  J(s) $                                                                                                                                   |
| PG      | $C_a(F, \alpha)$        | einmalige<br>Berechnung<br>von P(s) | $d^S := -P(s) \cdot C^S$                                                                                                                                                                                                                                                                | 1                                      | (eimm. Berechnung von P(s) nicht berücksichtigt)<br>$ B(s)  \cdot \rho_{ln} + m^2 \cdot \rho_{po} + \rho_{schr}$ wobei m die Ordnung von P(s) ist.                                                                                                                                  |
| RG      | $C_a(F, \alpha)$        | eimm. Ber.<br>von $P_0$             | $\tilde{d}^S := \theta^T(s) \cdot C^S(0) + F_0(s)$                                                                                                                                                                                                                                      | 1                                      | $ B(s)  \cdot \rho_{ln} + \rho_{schr}$                                                                                                                                                                                                                                              |
| FIX     | $K_a(\Delta F, \alpha)$ | ---                                 | Löse $\min_x \frac{1}{x} \cdot (C(s) [x^S \ln x - x^S] + x \cdot C_a(F, \alpha) \cdot x^S)$<br>unter $\Gamma x = N$ ( $x > 0$ )<br>Hieraus erhält man die Minimallösung $x^S$<br>mit $\phi^S(F, \alpha) = F^S$ , $d^S := F^S - F^S$ .                                                   | 1                                      | $\rho_{FIX} + \rho_{schr}$                                                                                                                                                                                                                                                          |

Tabelle 1. Gegenüberstellung der "wesentlichen" Rechenoperationen pro Quelle bei der

| A<br>n<br>s<br>s<br>t | Kosten-<br>funktionen-<br>typ | Ermittlung der Abstiegsrichtung               |                                                                                                                                                                                                                                           | Schritt-<br>weiten-<br>bereich-<br>nung | Wesentlicher<br>Rechenaufwand pro<br>Quelle                                                                               |
|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                       |                               | 1. Schritt                                    | 2. Schritt                                                                                                                                                                                                                                |                                         |                                                                                                                           |
| FW                    | $C_p(F, \alpha)$              | Alternativ-<br>routen P mit<br>KM-Algorithmus | Belasten des gefundenen Spannbaumes zur<br>Quelle seo mit $(N_t^S)_{seo}$ ergibt $F^S(N)$ .<br>$d^S = F^S(N) - F^S$                                                                                                                       | 1                                       | $ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{ln} +  d  \cdot \rho [Ex;  P_w ] \cdot \rho_{schr}$                                          |
| CS                    | $C_p(F, \alpha)$              | wie FW                                        | Für alle $w \in \{s\} \times D$ bestimme man:<br>$C_{b_w} := \min_{p \in P} C_p$ und $C_t := \max_{p \in P} C_p$<br>$d_p^S := \begin{cases} 1, & p = b_w, p \in P_w \\ -1, & p = t_w, p \in P_w \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$ | 2                                       | $\{ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{ln} + 2 \cdot  d  \cdot \rho [Ex;  P_w ] \cdot \rho_{schr}\} \cdot z$<br>$+ (z-1) \rho[k]$ |
| MRC                   | $C_p(F, \alpha)$              | wie FW                                        | Für alle $w \in \{s\} \times D$ bestimme $C_{b_w} := \min_{p \in P} C_p$<br>$d_p^S := \begin{cases} -(C_p - C_{b_w}) \cdot F, & p \in P_w, p \neq b_w \\ -\frac{d^S}{p \in P_w, p \neq b_w}, & p = b_w \end{cases}$                       | 1                                       | $ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{ln} +  d  \cdot \rho [Ex;  P_w ] \cdot \rho_{schr}$                                          |
| PG                    | $C_p(F, \alpha)$              | wie FW + P(s)                                 | $d^S := -P(s) \cdot C^S$                                                                                                                                                                                                                  | 1                                       | $ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{ln} +  d  \cdot \rho_{poc} \cdot \rho_{schr}$                                                |
| RG                    | $C_p(F, \alpha)$              | wie FW                                        | $d^S := \theta^T(s) C^S (\theta J + F_o, \alpha)$                                                                                                                                                                                         | 1                                       | $ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{ln} \cdot \rho_{schr}$                                                                       |
| FLX                   | $\bar{k}_p(F, \alpha)$        | wie FW                                        | Bestimme für alle $w \in \{s\} \times D$ und alle $p \in P_w$<br>$e := \exp\{-\bar{k}_p / \sigma(s)\}$ .<br>$d_p^S := \frac{\frac{1}{N} \sum_{p \in P_w} e}{\frac{1}{q} \sum_{p \in P_w} e} - F_p$ , für $p \in P_w$                      | 1                                       | $ d  \cdot  P_w  \cdot \rho_{exp} \cdot \rho_{po} \cdot \rho_{schr}$                                                      |

Tabelle 2. Gegenüberstellung der "wesentlichen" Rechenoperationen pro Quelle bei den Algorithmen für  $G(W, P)$ .

Prinzipiell gehen wir in den Tabellen 1 und 2 davon aus, daß die Kosten  $k_a(\Delta F, \alpha)$  bei der aktuellen Last  $F$  bekannt und berechnet sind, mit Ausnahme der CS-Ansätze, die je nach Anzahl der Iterationen  $z$  noch weitere  $(z-1)$  Funktionsauswertungen von  $k$  benötigen. Bei dem in den Tabellen 1 und 2 angeführten Rechenaufwand handelt es sich um die wesentlichen zeitaufwendigen Rechenoperationen, d.h. daß beispielsweise alle Strichoperationen (z.B. Berechnung von Kosten  $\bar{k}_p = \overline{\frac{1}{a \in p}} k_a$  oder Belastungen  $f_a = \overline{\frac{1}{p \in p}} \Delta_{ap} F_p$ ) nicht in die Angaben eingehen, weil sie vom Rechenaufwand her unbedeutend sind. Andererseits kann die Berechnung von  $f = \Delta F$  bei Rechnern mit kleinem Kernspeicher sehr zeitaufwendig sein, weil dann die Komponenten von  $F$  u.U. abschnittsweise (z.B. quellenweise) einzulesen sind und dadurch große Transportzeiten anfallen.<sup>1)</sup>

Für die Herleitung des Rechenaufwandes betrachten wir folgendes Beispiel:

#### Aufwand für die CS-Algorithmus in $G(W, G)$ pro Quelle:

Zunächst ist  $\sigma(s) \ln F_a^S$  zu bestimmen, also entsteht ein Rechenaufwand  $\rho_{1n}$  (einschließlich der Multiplikation  $\sigma(s) \cdot \ln F_a^S$ ). Dies ist im ungünstigsten Fall  $|B(s)|$ -mal durchzuführen. Dann sind die Zykelkosten  $\gamma_a^S$  für  $a \in J(s)$  zu berechnen; dies sind jedoch Strichoperationen. Anschließend sind maximal  $|J(s)|$  Multiplikationen  $\gamma_a^S \cdot F_a^S$  auszuführen. Die Bestimmung von  $\gamma_b^S$  und  $\gamma_t^S F_t^S$  ergibt den Aufwand  $2 \cdot \rho[Ex; |J(s)|]$ . Dann ist ein Vergleich nötig ( $|\gamma_b^S| \geq \gamma_t^S F_t^S$ ) und schließlich ist noch die Schrittweite zu bestimmen. Dieser Prozeß wiederholt sich pro Quelle  $z$  mal, bis er durch ein Abbruchkriterium gestoppt wird.

<sup>1)</sup> Da jedoch aus heutiger Sicht die Rechner der nächsten Generation immer größere und "schnellere" Speicher erhalten, erscheint das Speicherplatzproblem bei den folgenden Betrachtungen von unterge-

Es sei bemerkt, daß die Bestimmung der basischen Variablen  $d_b^s$  für  $b \in I(s)$  nur Strichoperationen sind.

In Spalte 5 der Tabellen 1 und 2 wird angegeben, wie oft die Schrittweite pro Quelle bestimmt wird. Eine "1" bedeutet, daß nach Bestimmung der Abstiegsrichtung ein Schrittweitenproblem zu lösen ist. Bei den CS-Ansätzen sind  $z$  Schrittweitenprobleme zu lösen. Dabei ist zu beachten, daß die Anzahl dieser Schrittweitenbestimmungen in den CS-Ansätzen einmal von einem Abbruchkriterium und zum anderen von dem zu wählenden Dekompositionsprinzip [a) Ermittlung eines annähernd exakten Gleichgewichtszustandes pro Quelle oder b) Ausführung nur eines Iterationsschrittes pro Quelle und dann Übergang zur nächsten Quelle] abhängt.

Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß der Aufwand für das einmalige Abändern aller nicht-basischen Variablen  $F_a^s$ ,  $a \in J(s)$ , bei den CS-Ansätzen merklich höher liegt, als bei den Ansätzen MRG, RG und PG <sup>1)</sup>; es muß nämlich gelten:  $z \geq |J(s)|$ . Selbst wenn man die Minimum- und Maximumbestimmung bei den CS-Ansätzen wegläßt und stattdessen alle nicht-basischen Variablen zyklisch abarbeitet, ist der Aufwand der CS-Ansätze (unter dem Aspekt:  $z \geq |J(s)|$  bzw.  $z \geq |D| \cdot \{ |P_w| - 1 \}$ ) durch die mehrmals anfallenden Funktionsauswertungen höher als bei den Ansätzen MRG, RG und PG.

---

<sup>1)</sup> Der FIX-Ansatz kann hier nicht in den Vergleich einbezogen werden.

Ehe wir die einzelnen Algorithmen einander gegenüberstellen, machen wir folgende grundlegende Bemerkung:

Für praktische Anwendungen sind Aussagen über das asymptotische Konvergenzverhalten der Algorithmen relativ unbedeutend. Zum einen sind die Eingabedaten für Wegewahlmodelle so stark fehlerbehaftet, daß die anzustrebende Genauigkeit der Gleichgewichtslösungen so gering ist, daß asymptotische Konvergenzaussagen nicht zum Tragen kommen. Andererseits erfordern die in der Praxis auftretenden großen Netze für die Gleichgewichtsbestimmung so viel Rechenzeit, daß meist schon nach wenigen Iterationen solche Verfahren aus Kostengründen abubrechen sind.

Deshalb kann ein für die Praxis relevanter Vergleich der angegebenen Algorithmen eigentlich nur auf der Rechenzeit der Algorithmen für eine vorgegebene Zahl  $n$  von Quell-Zyklen und der "Güte" des Ergebnisses nach  $n$  Quell-Zyklen beruhen.

Nun kann man jedoch sowohl aus den Tabellen 1 und 2 als auch aus den darauffolgenden Erläuterungen entnehmen, daß ein theoretischer Vergleich der untersuchten Verfahren nur unter erheblichen Einschränkungen möglich ist.

So kann theoretisch nicht geklärt werden, welcher Rechenaufwand für Kürzest-Weg-Algorithmen anzusetzen ist, da solche Algorithmen von Methoden, Programmiersprache, Programmierung, Netzstruktur und Netzcodierung wesentlich abhängen.

Dies hat zunächst zur Folge, daß die Algorithmen der beiden  $G'$ -Klassen nicht untereinander vergleichbar sind, daß für  $G'=G(W,P)$  die Wegmenge  $P$  praktisch a priori (durch KW-Algorithmen) zu bestimmen ist. Aber auch beim Vergleich innerhalb jeder der

G'-Klassen ergeben sich hierdurch Schwierigkeiten.

Für  $G(W,G)$  ist ein Vergleich der Ansätze CS, FW, MRG und PG theoretisch nicht durchführbar, da die Größen  $\rho[Ex; |J(s)|]$ ,  $\rho[KW(s)]$ ,  $x$  und  $y$  bzw.  $m$  (teilweise aus rechnerabhängigen Gründen)

nicht miteinander vergleichbar sind. Mit einiger Sicherheit läßt sich nur sagen, daß der FIX-Ansatz, in  $G(W,G)$  angewandt, wegen des hohen Rechenaufwandes zur Lösung des angegebenen nicht-linearen Gleichgewichtsproblems praktisch bedeutungslos ist.

Für  $G(W,P)$  kann man erkennen, daß der RG-Ansatz bezgl. der Rechenzeit am günstigsten abschneidet. An zweiter Stelle in diesem Vergleich steht der PG-Ansatz, gefolgt von den gleichaufwendigen FW- bzw. MRG-Ansätzen. Der CS-Ansatz kann aus den oben erläuterten Gründen nicht in den Vergleich einbezogen werden.

Der FIX-Ansatz in  $G(W,P)$  weist durch den Summanden  $|D| |P_w| \cdot \rho_{po}$  eine (leicht) schlechtere Rechenzeit auf als der an sich günstigste Ansatz, der RG-Ansatz (wenn man unterstellt, daß  $\rho_{exp} \approx \rho_{ln}$ ). Beachtet man jedoch, daß in Anwendungen bei den ersten Iterationen beim FIX-Verfahren mit dem konstanten Schrittweitenfaktor 1 gearbeitet werden kann und somit  $\rho_{schr} = 0$  gilt, dann lassen sich für dieses Verfahren einige Vorteile erkennen (vorausgesetzt es gilt:  $\rho_{schr} > D |P_w| \rho_{po}$ ).

Ein abschließendes Urteil über die Effizienz der untersuchten Algorithmen läßt sich also nicht bilden; hierzu wären vielmehr noch weitere empirische Untersuchungen nötig.

## II.2 Bestimmung des Gradienten $\frac{d}{d\alpha} Z(F(\alpha), \alpha)$

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und  $\delta \in L$ . Wir wollen in diesem Abschnitt die Frage untersuchen, wie man zum Optimierungsproblem

$$\hat{P}(\delta): \min_{\alpha \in A} Z(F_\delta(\alpha), \alpha)$$

den Gradienten  $\frac{d}{d\alpha} Z(F_\delta(\alpha), \alpha)$  berechnen kann. Zunächst gilt:

$$\frac{dZ}{d\alpha}(F_\delta(\alpha), \alpha) = \frac{\partial Z}{\partial F}(F_\delta(\alpha), \alpha) \frac{dF_\delta(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}(F_\delta(\alpha), \alpha).$$

Hauptschwierigkeit ist dabei die Bestimmung von  $\frac{dF_\delta(\alpha)}{d\alpha}$ , denn nach dem Satz über implizite Funktionen (I.5.8) gilt:

$$(II.2.1) \quad \frac{\partial G(F_\delta(\alpha), \alpha)}{\partial F} \frac{dF_\delta(\alpha)}{d\alpha} = - \frac{\partial G(F_\delta(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Ehe wir im einzelnen auf Lösungsmöglichkeiten von (II.2.1) eingehen, sei darauf hingewiesen, daß bei allen Anwendungen, die in dieser Arbeit untersucht werden, die Zielfunktion  $Z$  explizit von  $f \in \mathbb{R}_+^B$  abhängt und nicht von  $F \in \mathcal{F}_0$  bzw.  $F \in \mathcal{F}_p$  ( $f = \Delta F$ ). Hierdurch kann sich u.U. die Berechnung von  $\frac{d}{d\alpha} Z(F_\delta(\alpha), \alpha)$  vereinfachen. Sei etwa  $Z(F, \alpha) = \bar{Z}(\Delta F, \alpha)$  mit  $\bar{Z}: \mathbb{R}_+^B \times A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial Z}{\partial F}(F^*, \alpha^*) \frac{dF_\delta(\alpha^*)}{d\alpha} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial f}(\Delta F^*, \alpha^*) \Delta \frac{dF_\delta(\alpha^*)}{d\alpha} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial f}(\Delta F^*, \alpha^*) \frac{df_\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

wobei  $f_\delta = \Delta F_\delta$  und  $F^* = F_\delta(\alpha^*)$ .

Die Gleichung (II.2.1) stellt ein lineares Gleichgewichtsproblem dar, dessen Lösung in Abschnitt II.2.2 beschrieben wird. Die dort beschriebene Lösungsmethode bestimmt jedoch das i.a.

sehr hochdimensionale  $\frac{dF_\delta}{d\alpha}$ , ohne zu berücksichtigen, daß oft aufgrund

der Problemstellung das von der Dimension her wesentlich niedrigere  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  zu berechnen ist. Dieser letzte Aspekt wird in einem von dem Autor entwickelten Ansatz einbezogen. In Abschnitt II.2.1 wird gezeigt, wie  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  ebenfalls als Lösung eines linearen Gleichungssystems zu erhalten ist. Das vorgeschlagene Verfahren hat bei "niedrigen" Dimensionen von  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  geringere Rechenzeiten, als die Ansätze zur Berechnung von  $\frac{dF_\delta}{d\alpha}$  (vgl. Abschnitt II.2.3). Insbesondere wird in Abschnitt III.1 gezeigt, wie durch geeignete Umformungen des Gleichungssystems zur Lösung von  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  die Dimension sinnvoll reduziert werden kann.

## II.2.1 Direkte Berechnung von $\frac{df}{d\alpha}$

### (II.2.2) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathbb{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ . Mit der für  $G'$  definierten Bogenkostenfunktion  $c(F, \alpha) = \tilde{c}(F) + \Delta^t k(\Delta F, \alpha)$  (vgl. I.1.31) setzen wir:

$$U(F) := \begin{bmatrix} \Theta^t \frac{\partial c(F, \alpha)}{\partial F} \\ \hat{f} \end{bmatrix}, \quad V(F, \alpha) := \begin{bmatrix} \Theta^t \Delta^t \frac{\partial k(\Delta F, \alpha)}{\partial f} \\ \sigma \end{bmatrix}$$

$$\text{und } d(F, \alpha) = \begin{bmatrix} \Theta^t \Delta^t \frac{\partial k(\Delta F, \alpha)}{\partial \alpha} \\ \frac{dN(\alpha)}{d\alpha} \end{bmatrix}$$

wobei  $\sigma$  die  $((K(0) - |0|)x | B(0)|)$ -Nullmatrix ist und  $f = \Delta F$ .

Die Gleichung (II.2.1) ist dann äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} \Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix} \frac{dF_{\delta}(\alpha)}{d\alpha} + \begin{bmatrix} \Theta^t \Delta^t \frac{\partial k(\Delta F, \alpha)}{\partial f} \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{df_{\delta}(\alpha)}{d\alpha} + \begin{bmatrix} \Theta^t \Delta^t \frac{\partial k(\Delta F, \alpha)}{\partial \alpha} \\ \frac{dN(\alpha)}{d\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

oder zu

$$U(F) \frac{dF_{\delta}(\alpha)}{d\alpha} + V(F, \alpha) \frac{df_{\delta}(\alpha)}{d\alpha} + d(F, \alpha) = 0.$$

Es ist zu beachten, daß

$$\frac{\partial k}{\partial F} = \frac{\partial k}{\partial f} \Delta \text{ und somit } \frac{\partial k}{\partial F} \frac{dF_{\delta}}{d\alpha} = \frac{\partial k}{\partial f} \frac{df_{\delta}}{d\alpha} \text{ ist.}$$

Nun gilt folgender

(II.2.3) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}$ . Für alle  $F \in \mathcal{F}$  mit  $F > 0$  und alle  $\sigma \in \mathbb{R}^0$  mit  $\sigma > 0$  ist  $U(F)$  invertierbar und es gilt:

$$U^{-1}(F) = [\Theta(\Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta)^{-1}, \{E - \Theta(\Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta)^{-1} \Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \hat{\Gamma}^t (\hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^t)^{-1}]$$

Beweis:

Man prüft leicht nach, daß  $U^{-1}(F)U(F) = E$  ist.

Wir können nun eine Formel zur Berechnung von  $\frac{df_{\delta}}{d\alpha}$  angeben:

(II.2.4) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und einer offenen Parametermenge  $A$ . Ferner sei  $\delta \in L$  und  $(F^*, \alpha^*) \in I(\delta)$ . Mit  $f_{\delta} := \Delta F_{\delta}$  gilt dann an der Stelle  $(F^*, \alpha^*) \in \mathcal{F} \times A$ :

$$(II.2.5) \quad [E + \Delta U^{-1}V] \frac{df_{\delta}}{d\alpha} = -\Delta U^{-1}d$$

Beweis:

Es gilt an der Stelle  $(F^*, \alpha^*) \in \mathcal{F} \times A$ :

$$U \frac{dF_\delta}{d\alpha} + V \frac{df_\delta}{d\alpha} + d = \theta.$$

Da  $U$  invertierbar ist, folgt:

$$\frac{dF_\delta}{d\alpha} = -U^{-1} V \frac{df_\delta}{d\alpha} - U^{-1} d.$$

Durch Anwenden von  $\Delta$  auf dieser Gleichung erhält man die Formel (II.2.5).

Die in Formel (II.2.5) auftretenden Matrizen haben eine Reihe günstiger Eigenschaften, die bei der numerischen Lösung von (II.2.5) von Vorteil sind.

(II.2.6) SATZ:

Sei  $\tau = (G, G', \Delta, N, k, \sigma) \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ . An der Stelle  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A$  mit  $F > 0$  gilt:

$$\Delta U^{-1} V = \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta_s X_s \Delta_s^t \right] \frac{\partial k}{\partial f} \quad \text{und}$$

$$\Delta U^{-1} d = \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta_s X_s \Delta_s^t \right] \frac{\partial k}{\partial \alpha},$$

wobei gilt:

$$X_s := \Theta(s) (\Theta^t(s) \frac{d\tilde{\sigma}^s}{dF} \Theta(s))^{-1} \Theta^t(s)$$

$$\text{und } \Delta = [\Delta_{s_1}, \dots, \Delta_{s_n}] \quad \text{mit } \{s_1, \dots, s_n\} = \emptyset.$$

Insbesondere gilt für  $G' = G(W, P)$  und  $\Delta = \Delta^{BP}$ :

$$\Delta U^{-1} V = \left[ \frac{\partial}{\partial w} \Delta_w X_w \Delta_w^t \right] \frac{\partial k}{\partial f} \quad \text{und}$$

$$\Delta U^{-1} d = \left[ \frac{\partial}{\partial w} \Delta_w X_w \Delta_w^t \right] \frac{\partial k}{\partial \alpha},$$

wobei gilt:

$$X_w := \Theta(w) (\Theta^t(w) \frac{d\tilde{\sigma}^w}{dF} \Theta(w))^{-1} \Theta^t(w)$$

$$\text{und } \Delta = [\Delta_{w_1}, \dots, \Delta_{w_n}] \quad \text{mit } \{w_1, \dots, w_n\} = W.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\Delta U^{-1}V = \Delta \left( \Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta \right)^{-1} \Theta^t \Delta^t \frac{\partial k}{\partial f}.$$

Nach (I.1.11) bzw. (I.1.18) ist  $\Theta$  eine Blockdiagonalmatrix, so daß auch das Produkt  $\Theta \left( \Theta^t \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta \right)^{-1} \Theta^t$  eine Blockdiagonalmatrix ist. Nach der angegebenen Aufspaltung der  $\Delta$ -Matrizen nach Quellen  $seO$  bzw. Quell-Ziel-Paaren  $wEW$  erhält man deshalb die angegebenen Formeln.

Satz (II.2.6) besagt, daß zur Berechnung der in (II.2.5) eingehenden Matrizen nicht gleichzeitig Informationen des "Gesamtnetzwerkes" nötig sind; vielmehr kann die aus der Inversion von  $U$  resultierende Rechenarbeit sukzessive nach Quellen bzw. Quell-Ziel-Paaren ausgeführt und durch Addition von Matrizen das "Endergebnis" gewonnen werden. Der folgende Satz faßt zwei wichtige Eigenschaften der Matrizen  $X_S$  bzw.  $X_W$  zusammen.

(II.2.7) SATZ:

*Es gelten die Bezeichnungen des vorangegangenen Satzes.*

*Die Matrizen  $\Delta_S X_S \Delta_S^t$  bzw.  $\Delta_W X_W \Delta_W^t$  sind symmetrisch und positiv semidefinit.*

Der Beweis ist trivial.

Wir definieren nun folgende Matrizen:

$$Q := \overline{\sum_{seO}} \Delta_S X_S \Delta_S^t \quad (\text{symmetrisch, positiv semidefinit}),$$

$$H := \frac{\partial k}{\partial f} \quad (\text{symmetrisch, wie bisher immer angenommen})$$

$$\text{und außerdem } b := -\Delta U^{-1}d = -Q \frac{\partial k}{\partial \alpha}.$$

Dann ist das Gleichungssystem (II.2.5) äquivalent zum

GLSN-Ansatz:  $[E + QH] \frac{df_\delta}{d\alpha} = b.$

Kann man zusätzlich noch sichern, daß  $H$  positiv definit ist, so ist (II.2.5) äquivalent zum

GLSI-Ansatz:  $[H^{-1} + Q] y = b$  und  $\frac{df_\delta}{d\alpha} = H^{-1} y.$

Die Systemmatrix  $H^{-1} + Q$  ist jetzt symmetrisch und positiv definit.

Je nach Wahl des Ansatzes (GLSN oder GLSI) zur Lösung von (II.2.5) ergeben sich unterschiedliche numerische Lösungsmethoden, die dann in Abschnitt II.2.3 einander gegenübergestellt werden.

Doch zunächst wollen wir kurz einige naheliegende Verfahren der linearen Maschenanalyse zur Lösung von (II.2.1) skizzieren.

## II.2.2 Berechnung von $\frac{df}{d\alpha}$ mit anschließender Bestimmung von $\frac{df}{d\alpha}$

(II.2.8) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und sei  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A.$

Dann setzen wir:

$$\Gamma(\alpha) = \{ \psi \in \mathcal{R}^{B(0)} \mid \Gamma \psi = \frac{\partial N(\alpha)}{\partial \alpha} \} \text{ und}$$

$$S(\psi) = \frac{1}{2} \psi^t \frac{\partial c(F, \alpha)}{\partial F} \psi + \psi^t \frac{\partial c(F, \alpha)}{\partial \alpha} \text{ für } \psi \in \Gamma.$$

Das Gleichungssystem (II.2.5) läßt sich durch weitere äquivalente Ansätze charakterisieren:

(II.2.9) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und sei  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A.$  Die Matrix  $\frac{\partial k(F, \alpha)}{\partial f}$  sei symmetrisch und positiv semiäffinit.

Dann sind äquivalent

$$(1) \hat{\psi} := \theta \hat{\varphi} \text{ löst (II.2.5) (RG-Ansatz),}$$

$$(2) \left[ \theta^t \frac{\partial c(F, \alpha)}{\partial F} \theta \right] \hat{\varphi} + \theta^t \left[ \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{\partial c}{\partial F} \psi_i \right] = \theta,$$

wobei  $\psi_i$  eine partikuläre Lösung von  $\Gamma\psi = \frac{\partial N}{\partial \alpha}$  ist,

$$(3) S(\hat{\psi}) = \min_{\psi \in \Gamma} S(\psi).$$

Die Charakterisierung von  $\hat{\psi}$  durch die Optimierungsaufgabe (II.2.9)

(3) entspricht der Charakterisierung von Gleichgewichten durch Optimierungsaufgaben in (I.2.22)(2). Der Ansatz (II.2.9)(2) entspricht dem RG-Ansatz aus II.1.2.

Zur Lösung von (II.2.9)(2) könnte etwa das Einzelschrittverfahren herangezogen werden (vgl. WERNER [71]). Zur Lösung von (II.2.9)(3) kommen beispielsweise das projizierte Gradientenverfahren, das Einzelschrittverfahren oder eine aus dem Fixpunktansatz in II.1.2 abgeleitete Methode in Frage.

#### Der Fixpunkt-Ansatz (FIX-Ansatz)

Für festvorgegebenes  $\tilde{\psi} \in \Gamma$  gibt es  $\psi \in \Gamma$ , so daß an der Stelle  $(F, \alpha) \in T \times A$  gilt:

$$U\psi + V \Delta \tilde{\psi} + d = \theta.$$

Ähnlich wie (II.1.16) zeigt man, daß  $\psi - \tilde{\psi}$  eine Abstiegsrichtung zum Optimierungsproblem  $\min_{\psi \in \Gamma} S(\psi)$  im Punkt  $\tilde{\psi}$  angibt:

(II.2.10) SATZ:

Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt an der Stelle  $\tilde{\psi} \in \Gamma$ :

$$l(\tilde{\psi}) := -U^{-1}V\Delta\tilde{\psi} - U^{-1}d - \tilde{\psi}$$

ist Abstiegsrichtung zum Optimierungsproblem  $\min_{\psi \in \Gamma} S(\psi)$  im Punkt  $\tilde{\psi}$ .

Speziell im Weggraphen  $G(W,P)$  läßt sich  $\psi$  einfach berechnen. Setzt man  $h := \Delta^t \frac{\partial k}{\partial f} \Delta \tilde{\psi} + \Delta^t \frac{\partial k}{\partial \alpha}$  und  $a_p = \frac{\sigma(s)}{F_p}$  für  $p \in P_{st}$ , dann muß gelten

$$a_p \psi_p + h_p = \lambda_{st} \quad \text{und} \quad \overline{\overline{p \in P_{st}}} \psi_p = \frac{\partial N}{\partial \alpha}.$$

Hieraus erhält man

$$\psi_p = \frac{1}{a_p} \left[ \frac{\frac{\partial N}{\partial \alpha} + \overline{\overline{q \in P_{st}}} \frac{h_q}{a_q}}{\overline{\overline{q \in P_{st}}} \frac{1}{a_q}} - h_p \right].$$

Zu einer gegebenen Abstiegsrichtung  $l = l(\tilde{\psi})$  bestimmt man die zugehörige optimale Schrittweite wie folgt:

(II.2.11) SATZ:

*Es gelten die eingeführten Bezeichnungen. Für die optimale Schrittweite  $\tau$  in Richtung  $l$  gilt:*

$$\tau = - \frac{(\frac{\partial S(\hat{\psi})}{\partial \psi})^t l}{l^t \frac{\partial c}{\partial F} l}.$$

Beweis:

Die angegebene Formel folgt aus der Bedingung

$$\frac{dS(\hat{\psi} + \tau l)}{d\tau} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß zur Lösung des RG-Ansatzes das Einzelschrittverfahren, verglichen mit dem projizierten Gradientenverfahren oder der FIX-Methode, den geringsten Rechenaufwand benötigt. Deshalb wird im folgenden Vergleich zum RG-Ansatz nur das Einzelschrittverfahren als Lösungsmethode betrachtet.

### II.2.3 Aufwandsvergleich der vorgeschlagenen Methoden

Die eben angegebenen Lösungsansätze zur Bestimmung von  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  und die bereits angedeuteten Verfahren zur numerischen Ermittlung von  $\frac{df_\delta}{d\alpha}$  sollen nun hinsichtlich ihres Rechenaufwandes miteinander verglichen werden. Dabei ist ähnlich, wie schon in II.1 zu berücksichtigen, daß sich die notwendige Rechenzeit nicht nur aus der Anzahl der erforderlichen Operationen, sondern auch aus der Konvergenzgeschwindigkeit des verwendeten Verfahrens herleitet. Beachtet man weiterhin, daß bei der Lösung von  $\min_{\alpha} Z(F(\alpha), \alpha)$  die Ableitungen  $\frac{df}{d\alpha}$  bzw.  $\frac{dF}{d\alpha}$  an einer Vielzahl verschiedener Punkte  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A^*$  auszuwerten sind, so wird klar, daß auch das Konvergenzverhalten jedes Verfahrens zur Bestimmung der Ableitungen mit diesen Punkten wechselt. Deshalb scheint - nach Meinung des Autors - ein Vergleich der angegebenen Verfahren nur aufgrund der notwendigen Rechenzeiten pro Iterationsschritt durchaus vertretbar.

Der erforderliche Rechenaufwand soll, wie bereits in II.1.3, durch die Anzahl der nötigen Punktoperationen gemessen werden. Zur Abkürzung führen wir die Aufwandsfunktion  $\rho[.:.]$  ein. An erster Stelle soll dabei die auszuführende "Operation" stehen, an zweiter Stelle können, falls nötig, weitere Merkmale der an erster Stelle angegebenen "Operation" aufgeführt sein. Beispielsweise ist der Rechenaufwand für Multiplikationen einer  $n \times n$  Matrix  $A$  mit einem Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  (also  $y = Ax$ ) gleich  $n^2$ ; wir schreiben:

$$\rho[y] = \rho[Ax] = n^2.$$

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax=b$  nach der Gauß'schen Eliminationsmethode gilt (in Kurzform):

$$\rho[Ax=b; \text{Gauß-Eli.}] = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

(vgl. etwa WERNER [71]).

\*) durch Lösen von Gleichungssystemen, deren Systemmatrizen und rechte Seiten ebenfalls aus  $(F, \alpha)$  abhängen.

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems mit symmetrischer positiv definiter Matrix A mit dem Verfahren von Cholesky gilt:

$$\rho[Ax=b; \text{Cholesky}] = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{2}{3}n + n \cdot (\text{Wurzelberechnung})$$

(vgl. ebenfalls WERNER [71]).

Löst man  $Ax=b$  mit dem Einzelschrittverfahren (ES), so gilt:

$$\rho[Ax=b; \text{ES}] = z \cdot n^2,$$

wobei  $z$  die Anzahl der Iterationszyklen ist.

Bei den folgenden Aufwandsberechnungen gehen wir davon aus, daß die Matrizen

$$\frac{\partial k}{\partial f}, \frac{\partial k}{\partial \alpha} \text{ und } \frac{\partial \tilde{C}}{\partial F}$$

an der zu untersuchenden Stelle  $(F^*, \alpha^*) \in \mathcal{F} \times A$  bereits erstellt sind.

Außerdem verwenden wir in diesem Abschnitt folgende Abkürzungen:

$z :=$  Anzahl der Iterationszyklen bei Iterationsverfahren

$a :=$  Anzahl der eingehenden Parameter

$n :=$  Anzahl der (fest vorgegebenen) Wege  $p \in P_w$  für jedes Quell-Ziel-Paar  $w \in W$ .

$\rho_T :=$  Transportzeit, um die eventuell extern gespeicherten Netzdaten (z.B.  $\Gamma, \Delta, F, N$ ) für das gesamte Transportnetz einmal in den Rechnerkern zu holen.

$\rho_T$  hängt vom Rechner, der Größe des Graphen und den verwendeten Programmen ab. Wir nehmen an, daß  $\rho_T$  für  $G' = G(W, G)$  bzw.  $G' = G(W, P)$  in etwa gleich ist.

$\rho_v :=$  Rechenzeit zur Auswertung einer Quadratwurzel.

Da die Matrizen  $\Delta$ ,  $\Theta$  und  $\Gamma$  nur mit 1, -1 und  $\emptyset$  besetzt sind, gehen wir davon aus, daß Multiplikationen mit diesen Matrizen (bei geschickter Programmierung) Strichoperationen sind. Sie werden deshalb

im folgenden nicht berücksichtigt!

Bei der Diskussion des Rechenaufwandes ist zu unterscheiden nach

1. G'-Typ,
2. Lösungsansatz und
3. Lösungsmethode.

HINWEIS: Im folgenden bezeichnen K bzw. B die Mengen der Knoten bzw. Bogen in dem  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  zugrundeliegenden Graphen G.

#### Rechenaufwand für den GLSN- und GLSI-Ansatz

Wir erinnern an die Abkürzungen aus II.2.1:

$$Q = \overline{\sum_{s \in O}} \Delta_s X_s \Delta_s^t, \quad H = \frac{\partial k}{\partial f}, \quad b = -Q \frac{\partial k}{\partial \alpha}$$

mit  $X_s = \Theta^t(s) \left( \Theta^t(s) \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta(s) \right)^{-1} \Theta^t(s)$ .

Für  $G' = G(W, P)$  gilt sogar:

$$Q = \overline{\sum_{w \in W}} \Delta_w X_w \Delta_w^t \quad \text{mit} \quad X_w = \Theta(w) \left( \Theta^t(w) \frac{d\tilde{c}^w}{dF} \Theta(w) \right)^{-1} \Theta^t(w).$$

In beiden Fällen ist Q symmetrisch und positiv semidefinit.

#### Bestimmung von $\rho[Q]$

Ist  $G' = G(W, G)$ , dann sind die Inversen der  $(m(s) \times m(s))$ -Matrizen  $\Theta^t(s) \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta(s)$  zu bestimmen ( $m(s) = |B(s)| - |K(s)| + 1$ ). Geht man davon aus, daß in den durch die Praxis gegebenen Graphen  $G(W, G)$  für alle  $s \in O$  in etwa  $K(s) \approx K$  und  $B(s) \approx B$  ist, so können wir für alle  $s \in O$  annehmen  $m(s) = m$  und somit gilt:

$$\rho \left[ \left( \Theta^t(s) \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta(s) \right)^{-1} \right] = \frac{4}{3} m^3 - \frac{m}{3}$$

(vgl. WERNER [71]).

Hieraus folgt:

$$\rho[Q] = |O| \left\{ \frac{4}{3} m^3 - \frac{m}{3} \right\},$$

da die Multiplikationen mit  $\Theta(s)$  bzw.  $\Theta^t(s)$  als Strichoperationen gezählt werden.

Ist  $G' = G(W, P)$ , so nehmen wir an, daß pro Quelle-Ziel-Paar  $n$  Wege fest vorgegeben sind. Dann sind für alle  $w \in W$  die Inversen der  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrizen  $\Theta^t(w) \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta(w)$  zu bestimmen. Es gilt

$$\rho[(\Theta^t(w) \frac{d\tilde{c}}{dF} \Theta(w))^{-1}] = \frac{4}{3}(n-1)^3 - \frac{n-1}{3}$$

und somit

$$\rho[Q] = |W| \cdot \left\{ \frac{4}{3} (n-1)^3 - \frac{n-1}{3} \right\}.$$

#### Bestimmung von $\rho[b]$

Da für jeden Parameter eine Multiplikation der Matrix  $Q$  mit einem Vektor der Dimension  $|B|$  durchzuführen ist, gilt:

$$\rho[b] = \rho[-Q \frac{\partial k}{\partial x}] = a|B|^2.$$

Zur Lösung des GLSN-Ansatzes betrachten wir als direktes Verfahren (DV) das Gauß'sche Eliminationsverfahren und als iteratives Verfahren das Einzelschrittverfahren (ES). Beim GLSI-Ansatz verwenden wir als direktes Verfahren das Cholesky-Verfahren. Somit ergibt sich für  $G(W, G)$  und  $G(W, P)$  folgende Tabelle:

|                                       | GLSN-Ansatz<br>$(E+QH) \frac{df_\delta}{d\alpha} = b$ | GLSI-Ansatz<br>$(H^{-1}+Q)y=b$ und $\frac{df_\delta}{d\alpha} = H^{-1}y$ |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\rho[H^{-1}]$                        | -----                                                 | $ B  \leq \rho \leq \frac{4}{3}  B ^3 - \frac{ B }{3}$                   |
| $\rho[H^{-1}y]$                       | -----                                                 | $a B  \leq \rho \leq a B ^2$                                             |
| $\rho[QH]$                            | $ B ^2 \leq \rho \leq  B ^3$                          | -----                                                                    |
| $\rho[\frac{df_\delta}{d\alpha}; DV]$ | $\frac{ B ^3}{3} - \frac{ B }{3} + a B ^2$            | $\frac{ B ^3}{6} - \frac{ B }{6} + a \frac{ B ( B-1 )}{2} +  B \rho_v$   |
| $\rho[\frac{df_\delta}{d\alpha}; ES]$ | $z \cdot a \cdot  B ^2$                               | $z \cdot a \cdot  B ^2$                                                  |

Die auftretenden Ungleichungen entstehen dadurch, daß die Struktur von H zwischen einer Diagonalmatrix und einer vollbesetzten Matrix liegen kann. Somit lassen sich für jeden Ansatz und jeden G'-Typ die notwendigen Rechenzeiten bestimmen. Insbesondere läßt sich aus obiger Tabelle ablesen, daß bei wenigen Iterationszyklen z das Einzelschrittverfahren den geringeren Rechenaufwand aufweist, als die angegebenen direkten Verfahren.

Wenn H eine Diagonalmatrix mit lauter positiven Elementen ist (wie in vielen Anwendungen), dann ergeben sich folgende Formeln:

$$\rho\left[\frac{df}{d\alpha}\delta; \text{GLSI}, G(W,G), \text{ES}\right] =$$

$$|O| \cdot \left(\frac{4}{3}m^3 - \frac{m}{3}\right) + a|B|^2 + (a+1)|B| + z \cdot a \cdot |B|^2 + \rho_T,$$

wobei  $m = B-K+1$  ist.

$$\rho\left[\frac{df}{d\alpha}\delta; \text{GLSI}, G(W,P), \text{ES}\right] =$$

$$|W| \cdot \left(\frac{4}{3}(n-1)^3 - \frac{n-1}{3}\right) + a|B|^2 + (a+1)|B| + z \cdot a \cdot |B|^2 + \rho_T,$$

wobei n die Anzahl der Wege pro Quell-Ziel-Paar ist.

### Rechenaufwand für den RG-Ansatz

Wir lösen das lineare (positiv definite und symmetrische) Gleichungssystem

$$[O^t \frac{\partial C}{\partial F} O] \psi = - O^t \left[ \frac{\partial C}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial F} \psi_1 \right]$$

mit dem Einzelschrittverfahren ( $\Gamma\psi_1 = \frac{\partial N}{\partial \alpha}$ , vgl. (II.2.9)(2)).

Zur Bestimmung des Rechenaufwandes ist folgendes zu beachten:

Die Berechnung der partikulären Lösung  $\psi_1$  mit  $\Gamma\psi_1 = \frac{\partial N}{\partial \alpha}$  entspricht einer Belastung von Wegen (z.B. der Wege, die pro Erreichbarkeitskomponente einen Spannbaum bilden). Die hierdurch anfallenden

Strichoperationen sind also nicht zu berücksichtigen.

Weiterhin ergeben sich aus

$$\frac{\partial c}{\partial F} \psi_i = \frac{d\tilde{c}}{dF} \psi_i + \Delta^t \frac{\partial k}{\partial f} (\Delta \psi_i),$$

die Rechenaufwände (wenn  $\frac{\partial k}{\partial f}$  eine Diagonalmatrix ist)

$$\rho\left[\frac{\partial c}{\partial F} \psi_i; G(W,G)\right] = a \cdot \{|O| \cdot |B| + |B|\} \quad \text{und}$$

$$\rho\left[\frac{\partial c}{\partial F} \psi_i; G(W,P)\right] = a \cdot \{|W| \cdot n + |B|\}.$$

(Wir nehmen wiederum an, daß für alle  $s \in O$   $|B(s)| \approx |B|$  und pro Quell-Ziel-Paar  $n$  Wege vorgegeben sind.)

Insgesamt ergeben sich folgende wesentliche Rechenoperationen zur Lösung von (II.2.9) (2) mit dem Einzelschrittverfahren, wenn die Iterationen mit dem "Maschenstromvektor"  $\varphi$  durchgeführt werden: \*)

$$\rho\left[\frac{dF_\delta}{d\alpha}; RG, G(W,G), ES\right] =$$

$$a \cdot \{|O| |B| + |B|\} + z \cdot a |O| \cdot m^2 + z \cdot \rho_T,$$

wobei  $m = B-K+1$  ist.

$$\rho\left[\frac{dF_\delta}{d\alpha}; RG, G(W,P), ES\right] =$$

$$a \cdot \{|W| \cdot n + |B|\} + z \cdot a \cdot |W| \cdot (n-1)^2 + z \cdot \rho_T,$$

wobei  $n$  die Anzahl der Wege pro Quell-Ziel-Paar ist.

Es ist zu beachten, daß  $\Theta^t \frac{\partial c}{\partial F} \Theta$  eine Blockdiagonalmatrix ist.

\*) In  $G(W,G)$  kann es, je nach Anzahl der Bogen je Zyklus, sinnvoller sein, implizit mit den Vektoren  $\psi = \Theta \varphi$  und  $\Delta \psi$  zu arbeiten. In  $G(W,P)$  dürfte jedoch i.a. die Anzahl der Bogen pro Zyklus größer sein als  $n-1$ , so daß explizit mit dem Vektor  $\varphi$  zu arbeiten ist.

### Diskussion der Ergebnisse

Im den GLSI-Ansatz und den RG-Ansatz miteinander vergleichen zu können, nehmen wir an, daß die Matrix  $H = \frac{\partial k}{\partial f}$  Diagonalgestalt mit außer positiven Elementen hat und beide Ansätze mit dem Einzelschrittverfahren gelöst werden. Der nötige Rechenaufwand ist nochmals in Tabelle 3 zusammengestellt:

| $\begin{matrix} \text{Ansatz} \\ \backslash \\ \text{G'-Typ} \end{matrix}$ | $G(W, G)$                                                                                        | $G(W, P)$                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| GLSI                                                                       | $ O  \left[ \frac{4}{3} m^3 - \frac{m}{3} \right] + a B ^2 + (a+1) B  + z \cdot a B ^2 + \rho_T$ | $ W  \left[ \frac{4}{3} (n-1)^3 - \frac{n-1}{3} \right] + a B ^2 + (a+1) B  + z \cdot a B ^2 + \rho_T$ |
| RG                                                                         | $a\{ O  B  +  B \} + z \cdot a O  \cdot m^2 + z \cdot \rho_T$                                    | $a\{ W  \cdot n +  B \} + z \cdot a \cdot  W  \cdot (n-1)^2 + z \cdot \rho_T$                          |

Tabelle 3: Rechenaufwand für die Lösung des GLSI- und RG-Ansatzes mit dem Einzelschrittverfahren.

Aus Tabelle 3 ist ersichtlich, daß der Rechenaufwand für den RG-Ansatz mit der Anzahl  $z$  der Einzelschrittiterationen wesentlich schneller steigt als beim GLSI-Ansatz, falls  $|B|^2 < |O| \cdot m^2$  bzw.  $|B|^2 < |W|(n-1)^2$ . Insbesondere für  $G'=G(W, P)$  und kleines  $|B|$  sind Vorteile für den GLSI-Ansatz zu erkennen.

### BEISPIEL:

$G'=G(W, P)$ ,  $|B| = 50$ ,  $|W| = 10000$ ,  $n = 4$ ,  $a = 3$ . Dann ergeben sich

$$\rho \left[ \frac{df}{d\alpha}; \text{GLSI}, G(W, P), \text{ES} \right] = 357700 + 7500 \cdot z + \rho_T \text{ und}$$

$$\rho \left[ \frac{dF}{d\alpha}; \text{RG}, G(W, P), \text{ES} \right] = 120150 + 270000 \cdot z + z \cdot \rho_T.$$

Nach der zweiten Iteration hat man beim RG-Ansatz bereits mehr Rechenaufwand, als beim GLSI-Ansatz.

In diesem Zusammenhang wollen wir in Abschnitt III.1 zeigen, wie man die Anzahl der "relevanten Bogen"  $|B|$  und damit die Dimension des Gleichungssystems (II.2.5) klein halten kann.

Schließlich sei nochmals darauf hingewiesen, daß der RG-Ansatz pro Einzelschrittzyklus einmal die gesamte Netzinformation laden muß. Der hierdurch entstehende Transportaufwand  $z \cdot \rho_T$  (vgl. Tabelle 3) kann besonders bei Rechnern mit geringem Speicherplatz und relativ großen Netzen erheblich sein.

### II.3 Ein Algorithmus zur Lösung von $\hat{P}(\theta)$

In den letzten beiden Abschnitten wurden die wesentlichen Elemente zur Berechnung optimaler Parameter mittels  $\hat{P}(\theta)$  angegeben, nämlich einmal Verfahren zur Funktionsauswertung  $F(\alpha)$  (d.h. zur Gleichgewichtsbestimmung bei festem Parameter  $\alpha \in A$ ) und zum anderen Methoden zur Bestimmung von  $\frac{dF}{d\alpha}$  bzw.  $\frac{dF}{d\alpha}$  (und somit auch von  $\frac{dz}{d\alpha}$ ). Durch Kombination dieser Elemente ließe sich ohne Schwierigkeiten ein Algorithmus zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$  angeben, z.B. das Gradientenverfahren. Nun ist zu beachten, daß eine Lösung  $\alpha^0$  von  $\hat{P}(\theta)$  u.a. dadurch charakterisiert ist, daß  $F(\alpha^0)$  ein exakter Gleichgewichtsfluß ist, d.h. es gilt:  $G(F(\alpha^0), \alpha^0) = \delta$  mit  $\delta = 0$ . Es stellt sich jedoch die Frage, ob im Verlaufe eines Verfahrens zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$  für jeden Iterationspunkt  $\alpha^{(i)}$  der Flußzustand  $F(\alpha^{(i)})$  ein exaktes Gleichgewicht beschreiben muß, zumal die Berechnung von Gleichgewichten sehr aufwendig ist. Insbesondere würde man im Rahmen eines Iterationsprozesses mit "exakter" Gleichgewichtsermittlung beim Übergang zu neuen und besseren Parametern die jeweils zuletzt berechneten exakten Gleichgewichtszustände wieder verlassen. Deshalb liegt die Frage nahe, ob

man nicht im Verlaufe einer geeigneten Optimierungsmethode das Niveau  $\delta$  in  $G(F(\alpha), \alpha) = \delta$  sukzessive verbessern kann, d.h. es müßte gelten  $\delta \rightarrow 0$ . Auf diese Weise könnte man in einem Verfahren gleichzeitig "bessere" Parameter ermitteln und die "Gleichgewichtsgüte"  $\delta$  ständig "absenken".

Im folgenden geben wir hinreichende Bedingungen für die Konvergenz eines derartigen Optimierungsverfahrens an. Abschließend wird ein grundlegendes Verfahren zur optimalen Parameterbestimmung mit sukzessiver Niveauverbesserung aufgestellt.

### II.3.1 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt geben wir für Häufungspunkte  $(\hat{F}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{L}$  einer Folge  $(F_n, \alpha_n, \delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{L}$  hinreichende Bedingungen an, daß gilt:

$$(i) \quad G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = \hat{\delta}$$

$$(ii) \quad \hat{\delta} = 0$$

$$(iii) \quad \hat{\alpha} \text{ ist aus der Lösungsmenge von } \hat{P}(\hat{\delta}).$$

#### (II.3.1) DEFINITION:

Sei  $\tau \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ .

Gegeben seien die Optimierungsaufgaben  $(\hat{P}(\delta))_{\delta \in \mathcal{L}}$ .

Seien  $S$  und  $V$  Abbildungen von  $\mathbb{F} \times A \times L$  nach  $\mathbb{F} \times A \times L$  mit folgenden Eigenschaften:

(II.3.2) Für  $(F, \alpha, \delta) \in \mathbb{F} \times A \times L$  mit  $G(F, \alpha) = \delta$  gilt:  $V(F, \alpha, \delta) := (F', \alpha', \delta')$  mit  $G(F', \alpha') = \delta'$  und  $\delta' = \delta$  und  $R(\alpha') \leq \theta$ .

(Also:  $\delta$  wird von  $V$  nicht verändert!)

(II.3.3) Und:  $S(F, \alpha, \delta) := (\tilde{F}, \tilde{\alpha}, \tilde{\delta})$  mit  $\|G(\tilde{F}, \tilde{\alpha})\| \leq \|G(F, \alpha)\|$  und  $\alpha = \tilde{\alpha}$  und  $G(\tilde{F}, \tilde{\alpha}) = \tilde{\delta}$ .

(Also:  $\alpha$  wird von  $S$  nicht verändert!)

Unter den in Satz (I.6.4) angegebenen Voraussetzungen ist  $S$  eine stetige Abbildung.

Weiterhin benötigen wir:

(II.3.4) DEFINITION:

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  ein normierter Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$  und  $B: X \rightarrow X$ .

Dann heißt  $B$  nicht expandierend, wenn für alle  $u, v \in X$  gilt.

(II.3.5)  $\|B(u) - B(v)\| \leq \|u - v\|$

(II.3.6) DEFINITION:

Sei  $T \in \mathcal{T}$ . Mit  $\Omega \subset A$  bezeichnen wir die Lösungsmenge von  $\hat{P}(\theta)$ .

Die Voraussetzungen der folgenden Konvergenzsätze sind als Aussagen für den Gesamtbereich  $\mathbb{F} \times A \times L$  formuliert. Es sind jedoch Fälle denkbar, bei denen diese Voraussetzungen nur im Einzugsbereich lokal optimaler Punkte gelten. Auf eine derartige Verallgemeinerung wurde allerdings aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

(II.3.7) SATZ:

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$ ,  $A$  sei offen.

Gegeben seien die Optimierungsaufgaben  $(\hat{P}(\delta))_{\delta \in L}$ , ferner sei

$X_0 \in \mathcal{F} \times A \times L$  und  $\Omega \subset A$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$(II.3.8) \quad X_n := S \circ V(X_{n-1}) =: (F_n, \alpha_n, \delta_n)$$

Es gelte:

(II.3.9)  $H(\Delta F, \alpha)$  sei symmetrisch und positiv semidefinit für alle  $(F, \alpha) \in \mathcal{F} \times A$ .

(II.3.10) Bei Iteration nach der Vorschrift  $Y_n := V(Y_{n-1})$ , wobei  $Y_n = (H_n, \beta_n, \theta)$  ist, sei für beliebiges  $Y_0 = (H_0, \beta_0, \theta)$  jeder Häufungspunkt von  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\Omega$ .

(II.3.11)  $S \circ V$  sei eine nicht expandierende Abbildung

$$(II.3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$$

Dann besitzt  $(X_n)$  mindestens einen Häufungspunkt

$$\hat{X} = (\hat{F}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}) \text{ mit } G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = \theta = \hat{\delta} \text{ und } \hat{\alpha} \in \Omega.$$

Beweis:

Da  $S \circ V$  nicht expandierend ist, ist die Folge  $(X_n)$

beschränkt und besitzt mindestens einen Häufungspunkt. Aus

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$  folgt deshalb, daß für jeden Häufungspunkt

$$\hat{X} = (\hat{F}, \hat{\alpha}, \hat{\delta}) \text{ gilt: } G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = \theta = \hat{\delta}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $\hat{\alpha} \in \Omega$  ist.

Unter der Voraussetzung (II.3.9) ist die Abbildung  $\delta \mapsto F_\alpha(\delta)$  definiert für  $\alpha \in A$  und stetig (siehe Satz (I.6.4)).

Sei  $Y_n := (F_{\alpha_n}(\theta), \alpha_n, \theta)$ , d.h.  $G(F_{\alpha_n}(\theta), \alpha_n) = \theta$ .

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei in Abhängigkeit vom Startwertes  $Y_k$  eine Folge  $(Z_n(k))_{n \geq k}$  definiert durch:

$$Z_k(k) := Y_k$$

und für  $n > k$  sei

$$Z_n(k) := V(Z_{n-1}(k)) =: (H_n^k, \beta_n^k, \theta)$$

(II.3.13) Dann gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $k \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq k$  gilt:

$$\| X_n - Z_n(k) \| < \varepsilon .$$

Es gilt nämlich für  $\varepsilon > 0$  wegen (II.3.11)

$$\| X_n - Z_n(k) \| = \| S \circ V(X_{n-1}) - S \circ V(Z_{n-1}(k)) \|$$

$$\leq \| X_{n-1} - Z_{n-1}(k) \|$$

$$\vdots$$

$$\leq \| X_k - Z_k(k) \| .$$

Wegen der Stetigkeit von  $\delta \rightarrow F_\alpha(\delta)$  ist für genügend großes  $k \in \mathbb{N}$

$$\| X_k - Z_k(k) \| < \varepsilon .$$

Damit ist (II.3.13) bewiesen.

Es folgt nun, daß jeder Häufungspunkt von  $(X_n)$  auch Häufungspunkt von  $Z_n(k)$  ist und umgekehrt. Da wegen (II.3.10) jeder Häufungspunkt von  $(\beta_n^k)$  in  $\Omega$  liegt, gilt dies auch für jeden Häufungspunkt von  $(\alpha_n)$ . q.e.d.

Die Voraussetzung (II.3.9) sichert die Stetigkeit von  $\delta \rightarrow F_\alpha(\delta)$ .

Voraussetzung (II.3.12) besagt, daß das "Verfahren" so zu steuern ist, daß die Niveaus  $\delta$  sukzessive gegen  $\theta$  streben.

Forderung (II.3.10) garantiert, daß die Abbildung  $V$  wenigstens auf dem Nullniveau  $\delta = \theta$  einen Lösungspunkt von  $\hat{P}(\theta)$  liefert.

Die Voraussetzung (II.3.11) läßt sich in ihrer Bedeutung am Beweis der Behauptung (II.3.13) für  $n = k+1$  erläutern.

Wenn  $S \circ V$  nämlich nicht expandierend ist, muß gelten:

$$\| F_{k+1}^{\alpha_{k+1}, \delta_{k+1}} - V(F_{\alpha_k}(\theta), \alpha_k, \theta) \| \leq \| (F_k, \alpha_k, \delta_k) - (F_{\alpha_k}(\theta), \alpha_k, \theta) \|$$

oder

$$\| F_{k+1}^{\alpha_{k+1}, \delta_{k+1}} - F_{\alpha_k}^{\alpha_k, \delta_k} \| = \| \alpha_{k+1} - \alpha_k \| + \| \delta_{k+1} \| \leq \| F_k - F_{\alpha_k}(\theta) \| + \| \delta_n \| .$$

Die letzte Ungleichung besagt, daß das "Verfahren" so beschaffen sein muß, daß durch den Niveauabfall der Normzuwachs  $\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|$  zumindest ausgeglichen werden kann.

Im folgenden Satz wird auf die Forderung (II.3.11) verzichtet. Dafür wird gefordert, daß  $S \circ V$  stetig ist und  $V$  auf dem Nullniveau eine konvergente Folge erzeugt, so daß der Grenzwert der Parameterfolge in  $\Omega$  liegt. Wenn dann  $(X_n)$  konvergiert, liegt der Grenzwert von  $(\alpha_n)$  in  $\Omega$ .

(II.3.14) SATZ:

*Es gelten die in (II.3.7) eingeführten Bezeichnungen.*

*Außerdem gelten folgende Voraussetzungen:*

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$

(ii) *Bei Iteration nach der Vorschrift  $Y_n := V(Y_{n-1})$ , wobei  $Y_n := (H_n, \beta_n, \theta)$  ist, sei die Folge  $(Y_n)$  für jeden Startwert  $Y_0 := (H_0, \beta_0, \theta)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  liege in  $\Omega$ .*

(iii)  $S \circ V$  sei stetig.

(iv) Die Folge  $(X_n)$  sei konvergent.

*Dann liegt der Grenzwert von  $(\alpha_n)$  in  $\Omega$ .*

Beweis:

Sei  $\hat{X} := (\hat{F}, \hat{\alpha}, \theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Dann gilt also  $G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = \theta$ .

Angenommen  $\hat{X} \notin \Omega$ , dann gilt wegen (ii)

$$\|(S \circ V)(\hat{X}) - \hat{X}\| =: a > 0.$$

Wegen (iii) gibt es aber  $k \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq k$  gilt:

$$\|S \circ V(X_n) - S \circ V(\hat{X})\| < \frac{a}{2}$$

oder 
$$\|X_n - S \circ V(\hat{X})\| < \frac{a}{2}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \hat{X}$  folgt hieraus sofort ein Widerspruch.

### II.3.2 Ein grundlegender Algorithmus

Es soll nun ein Algorithmus zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$  angegeben werden. Um Satz (II.3.7) anwenden zu können, werden die Abbildungen  $S$  und  $V$  durch Unteralgorithmen definiert:

$S$  beschreibe einen Algorithmus zur Bestimmung von Gleichgewichten bei festem  $\alpha \in A$ , etwa wie in II.1.

$V$  sei ein Algorithmus zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$ , der jedoch auch für  $\hat{P}(\delta)$  anwendbar sei, etwa das Gradientenverfahren, wenn keine Restriktionen  $R$  vorhanden sind.

Dann läßt sich folgender Algorithmus zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$  unter sukzessiver Niveauverbesserung der Probleme  $\hat{P}(\delta)$  angeben:

• (II.3.15) ALGORITHMUS:

(0) Bestimme Startlösung  $(F^{(0)}, \alpha^{(0)}, \delta^{(0)}) \in \mathcal{F} \times A \times L$  mit

$$G(F^{(0)}, \alpha^{(0)}) = \delta^{(0)}.$$

Ist  $\delta^{(0)} = \theta$  und  $\alpha^{(0)} \in \Omega$ , dann STOP. Sonst  $i := 0$  gehe zu (1).

(1) Bestimme  $\frac{d f_{\delta^{(i)}}(F^{(i)}, \alpha^{(i)})}{d \alpha}$  mit einem in II.2 angegebenen Verfahren und berechne

$$F^{(i+1)} := \frac{dZ(F^{(i)}, \alpha^{(i)})}{d\alpha} = \frac{\partial Z(F^{(i)}, \alpha^{(i)})}{\partial F} \frac{d f_{\delta^{(i)}}(F^{(i)}, \alpha^{(i)})}{d\alpha} + \frac{\partial Z(F^{(i)}, \alpha^{(i)})}{\partial \alpha}$$

- (2) Bestimme mit V mittels  $r^{(i)}$  eine Abstiegsrichtung  $d^{(i)}$  zu  $\hat{P}(\delta^{(i)})$  und eine Schrittweite  $\tau^{(i)} > 0$ .  
 Setze:  $\alpha^{(i+1)} := \alpha^{(i)} + \tau^{(i)} d^{(i)}$
- (3) Bestimme mit S ein  $F^{(i+1)}$  und  $\delta^{(i+1)}$ , so daß gilt:  
 $G(F^{(i+1)}, \alpha^{(i+1)}) = \delta^{(i+1)}$   
 mit  $\|\delta^{(i+1)}\| \leq \|\delta^{(i)}\|$
- (4) Ist  $\delta^{(i+1)} = 0$  und  $\alpha^{(i+1)} \in \Omega$ , dann STOP. Ist  $\delta^{(i+1)} \neq 0$  und  $\alpha^{(i+1)} \notin \Omega$ , dann  $i := i+1$ , gehe zu (3). Sonst  $i := i+1$ , gehe zu (1).

(II.3.16) SATZ:

*Der Algorithmus (II.3.15) konvergiert gegen einen Lösungspunkt  $(\hat{F}, \hat{\alpha}, \theta) \in \mathcal{F} \times A \times L$  mit  $\hat{\alpha} \in \Omega$  und  $G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = 0$ , wenn die Voraussetzungen (II.3.9) - (II.3.11) erfüllt sind.*

Beweis:

(II.3.12) wird in Schritt (4) von (II.3.15) gesichert.

(II.3.17) BEMERKUNGEN:

Wir gehen in (II.3.7) und (II.3.15) davon aus, daß S und V eindeutige Abbildungen sind. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung für die Anwendbarkeit von (II.3.15), denn bei der Implementation von S und V am Rechner muß man sich immer für genau einen neuen Iterationspunkt entscheiden.

In (II.3.15)(2) wird verlangt, daß  $d^{(i)}$  mittels  $r^{(i)}$  bestimmt werden soll, weil in dieser Arbeit eben Verfahren untersucht werden, die auf der Bestimmung des Gradienten beruhen.

### Kapitel III , Anwendungen und Ergebnisse

=====

Die Hauptschwierigkeiten des in (II.3.15) beschriebenen Algorithmus bei der Anwendung auf große Verkehrsnetzwerke liegen im Schritt (1), der Berechnung von  $\frac{df}{d\alpha}$  und im Schritt (2) bei der Bestimmung einer (optimalen) Schrittweite  $\tau$ . Für drei Parameterklassen, die jeweils auch die Struktur des Optimierungsproblems  $\hat{P}(\delta)$  bestimmen, wird im folgenden gezeigt, wie diese Schwierigkeiten durch Umformungen und vereinfachende Annahmen zu umgehen sind.

Abschnitt III.1 beschäftigt sich mit dem "reinen" Kalibrierungsproblem zur Schätzung von Modellparametern anhand empirisch gewonnenen Werte. Insbesondere wird die in II.2.1 beschriebene Methode zur Berechnung von  $\frac{df}{d\alpha}$  weiter modifiziert. Zur Lösung des Schrittweitenproblems muß jedoch auf die Standardliteratur zur eindimensionalen Minimumsuche verwiesen werden, z.B. LUENBERGER [67], ZANGWILL [72].

Der folgende Abschnitt III.2 behandelt einen speziellen Parametertyp, wie er z.B. bei der modellmäßigen Erfassung unsignalisierter Kreuzungen auftritt, wenn man die Beeinflussung des nicht-bevorrechtigten Verkehrs durch bevorrechtigten Verkehr berücksichtigen will. Es handelt es sich dabei um ein Gleichgewichtswegwahlmodell, bei dem das in (I.2.22)(2) definierte assoziierte Optimierungsproblem nicht existiert, weil die zugehörige Jacobimatrix nicht symmetrisch ist. Wir fassen hier als Parameter die "unsymmetrischen Anteile" der Jacobimatrix auf. Unter vereinfachenden Annahmen lassen sich dann  $\frac{df}{d\alpha}$  und  $\tau$  problemlos berechnen.

Ein spezielles Ergebnis dieses Abschnittes ist ein empirischer Vergleich (anhand Erlanger Daten) der Algorithmen von DAFERMOS [5] und NGUYEN [9] und der hier vorgestellten Verfahren zur Lösung des Gleichgewichtswegewahlproblems in Verkehrsnetzwerken.

Im letzten Abschnitt III.3 wird untersucht, wie man die häufig mit Fehlern behaftete Fahrtenmatrix aufgrund von Verkehrszählungen dem tatsächlichen Verkehrsablauf besser anpassen kann. Hierzu werden Quell- und Zielstärken als Parameter aufgefaßt. Auch hier kann man unter vereinfachenden Annahmen ein Verfahren konzipieren, das  $\frac{df}{d\alpha}$  und  $\tau$  in einem Schritt berechnet.

In jedem Abschnitt werden Ergebnisse dargestellt, die mit Daten der Stadt Erlangen für den jeweils speziellen Problemkreis errechnet wurden.

### III.1 Kalibrierung von Parametern

#### III.1.1 Problemformulierung

Bei der Beschreibung eines Transportnetzwerkes  $T \in \mathcal{T}$  müssen u.a. für jeden Bogen  $a \in B$  Kostenfunktionen  $k_a(\cdot, \alpha)$  mit gewissen Parametern  $\alpha \in A$  angegeben werden. Parameter legen gewisse Charakteristika der Kostenfunktionen fest. In vielen Fällen spiegeln sie Verhalten, Einschätzungen oder "kognitive Prozesse" von "Durchschnittsbenutzern" des Transportnetzwerkes wider. Kalibrieren eines Wegewahlmodells bedeutet Ermittlung dieser Parameter anhand empirisch gewonnener Größen, wie z.B. Querschnitts- und Knotenstromzählungen oder Fahrtzeitmessungen. In dieser Arbeit haben wir dies im Problem  $P(\theta)$  formuliert:

$$\min_{(F, \alpha)} Z(F, \alpha)$$

$$G(F, \alpha) = \theta$$

$$R(\alpha) \leq \theta$$

(Siehe hierzu I.5.)

Üblicherweise ist  $Z$  von der Form

$$(III.1.1) \quad Z_I(f(\alpha)) := (f_I(\alpha) - m_I)^t G_I (f_I(\alpha) - m_I),$$

wobei  $I \subset B$ ,  $G_I$  eine positiv definite  $I \times I$ -Matrix und  $m_I \in \mathbb{R}_+^I$  ein Vektor mit Zählwerten auf den Bogen  $a \in I$  ist  $(f_I(\alpha) := (f_a(\alpha))_{a \in I})$ .  $G_I$  nennt man auch Gewichtsmatrix. Beispiele für Matrizen  $G_I$  finden sich in DAGANZO [41]. Eine in der Literatur häufig zu findende Matrix  $G_I$  ist die  $(I \times I)$ -Einheitsmatrix  $E_I$ , d.h. in diesem Fall wird jeder Zählstelle das gleiche Gewicht zugeordnet. Auch wir wollen im folgenden annehmen, daß gilt:  $G_I = E_I$ .

Unser Hauptaugenmerk gilt im folgenden der Tatsache, daß bei den meisten Anwendungen gilt:

$$I \neq B,$$

d.h. nicht zu jedem Bogen  $a \in B$  liegen Zählwerte  $m_a$  vor. Es gilt somit

$$(III.1.2) \quad \frac{dz_I}{d\alpha} = \prod_{a \in B} \frac{\partial z_I}{\partial f_a} \frac{df_a}{d\alpha} = \prod_{a \in I} \frac{\partial z_I}{\partial f_a} \frac{df_a}{d\alpha}.$$

Deshalb ist zu fragen, ob man nicht für eine geeignete Obermenge  $\hat{I}$  von  $I$  mit  $\hat{I} \subset B$   $\left(\frac{df_a}{d\alpha}\right)_{a \in \hat{I}}$  bestimmen kann, ohne  $\left(\frac{df_a}{d\alpha}\right)_{a \in B \setminus \hat{I}}$  berechnen zu müssen. Zur Beantwortung dieser Fragen formen wir das lineare Gleichungssystem (II.2.5) um.

### III.1.2 Dimensionsreduktion

Das lineare Gleichungssystem (II.2.5) soll zunächst in ein äquivalentes System niedrigerer Dimension umgeformt werden.

Sei  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $\sigma > 0$  und  $A \subset \mathbb{R}^1$  sei offen.  $f_\delta$  sei wie in (II.2.4) definiert und  $(F^*, \alpha^*)$  sei aus  $I(\delta)$ .

Außerdem sei  $\hat{P}(\delta)$  gegeben mit  $Z = \bar{Z}$  wie in (II.2.1).

$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \alpha}$  kann auch ungleich Null sein.

Wir führen folgende Bezeichnungen für  $f_\delta(\alpha^*) = \Delta F_\delta(\alpha^*) = \Delta F^*$  ein:

$$(III.1.3) \quad r := r(\alpha^*) := \frac{d\bar{Z}}{d\alpha}(f_\delta(\alpha^*), \alpha^*)$$

$$(III.1.4) \quad z := z(\alpha^*) := \frac{\partial \bar{Z}}{\partial f}(f_\delta(\alpha^*), \alpha^*)$$

$$(III.1.5) \quad X := X(\alpha^*) := \frac{df}{d\alpha}(\alpha^*)$$

$$(III.1.6) \quad v := v(\alpha^*) := \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \alpha} (f_\delta(\alpha^*), \alpha^*).$$

Außerdem seien  $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  mit  $z_2 = 0$  und  $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ , so daß

die Komponenten von  $z_1$  bzw.  $X_1$  den Bogen  $a\hat{e}\hat{I}$  mit  $I\hat{c}\hat{I}cB$  entsprechen, wobei  $I$  diejenigen Bogen charakterisiert, für die Zählwerte vorliegen. Es gilt dann:

$$(III.1.7) \quad r = v + \langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \rangle = v + \langle z_1, X_1 \rangle,$$

wobei  $\langle x, y \rangle := x^t y$  ist.

Außerdem wissen wir von (II.2.5), daß sich  $X$  als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems ergibt:

$$(III.1.8) \quad (E + QH)X = -QD,$$

wobei  $Q$ ,  $H$  und  $D$  von  $(F^*, \alpha^*)$  abhängen.<sup>1)</sup>

Im Hinblick auf die Zerlegung von  $X^t = (X_1^t, X_2^t)$  zerlegen wir

$$(III.1.8) \text{ wie folgt, wobei wir fordern: } H = \begin{bmatrix} H_1 & \sigma \\ \sigma & H_2 \end{bmatrix}.$$

$$(III.1.9) \quad \begin{bmatrix} E_1 & \sigma \\ \sigma & E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^t & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & \sigma \\ \sigma & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^t & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } E = \begin{bmatrix} E_1 & \sigma \\ \sigma & E_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^t & Q_3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}.$$

Die Dimensionen sind durch die Zerlegung von  $X$  in  $X_1$  und  $X_2$  festgelegt. Man beachte, daß wegen (II.2.7)  $Q$  symmetrisch ist.

Die Annahme  $H = \begin{bmatrix} H_1 & \sigma \\ \sigma & H_2 \end{bmatrix}$  ist in vielen praktischen Anwendungen

erfüllt.

Eine äquivalente Umformung von (III.1.8) in ein lineares Gleichungssystem mit niedrigerer Dimension wird im folgenden angegeben.

<sup>1)</sup> Vgl. II.2.1:  $Q = \sum_{s \in O} \Delta_s X_s \Delta_s^t$ ,  $H = \frac{\partial k}{\partial f}$  und  $D = \frac{\partial k}{\partial \alpha}$ .

(III.1.10) BEMERKUNG:

Wenn (III.1.9) lösbar ist, dann gilt für die Lösung

$$x = (x_1^t, x_2^t)^t:$$

$$(III.1.11) \quad (E_1 + Q_1 H_1) X_1 = Q_1 D_1 + K.$$

$$\text{wobei } K := Q_2 D_2 - Q_2 H_2 X_2$$

Sei nun  $\tilde{K}$  eine Näherung von  $K$ . Wir wollen die Frage untersuchen, ob man nicht ersatzweise für (III.1.11) das lineare Gleichungssystem

$$(III.1.12) \quad (E_1 + Q_1 H_1) X_1 = Q_1 D_1 + \tilde{K}$$

lösen kann.

Wenn  $\tilde{K}$  eine Näherung von  $K$  ist, so können wir schreiben:  $\tilde{K} = K + \bar{K}$ .

Dann gelten folgende einfache Abschätzungen:

(III.1.13) SATZ:

*Gegeben sei (III.1.9). Die Vektoren  $K$  und  $\bar{K}$  seien wie oben definiert. Außerdem sei  $B := Q_1 D_1 + K$ .*

*Dann unterscheiden wir  $X_1$  und  $\bar{X}_1$  durch*

$$(III.1.14) \quad (E_1 + Q_1 H_1) X_1 = B \text{ und}$$

$$(III.1.15) \quad (E_1 + Q_1 H_1) \bar{X}_1 = B + \bar{K}.$$

*Wenn  $(E_1 + Q_1 H_1)$  invertierbar ist, gelten folgende Abschätzungen:*

$$(III.1.16) \quad \|X_1 - \bar{X}_1\|_1 \leq \|(E_1 + Q_1 H_1)^{-1}\|_2 \quad \|\bar{K}\|_1$$

und

$$(III.1.17) \quad \frac{\|X_1 - \bar{X}_1\|_1}{\|X_1\|_1} \leq \kappa(E_1 + Q_1 H_1) \cdot \frac{\|\bar{K}\|_1}{\|B\|_1}.$$

*Wobei  $\kappa(E_1 + Q_1 H_1) = \|E_1 + Q_1 H_1\|_2 \cdot \|(E_1 + Q_1 H_1)^{-1}\|_2$  die Konditionszahl zu  $E_1 + Q_1 H_1$  ist und die Norm  $\|\cdot\|_1$  passend <sup>\*</sup> zu  $\|\cdot\|_2$  gewählt ist.*

Beweis: ,

Siehe z.B. WERNER [71] S.158.

(III.1.18) SATZ:

*Gegeben sei (III.1.9).*

*Sei K wie in (III.1.11) definiert.*

*Wir unterscheiden  $X_1$  und  $\hat{X}_1$  durch*

$$(III.1.19) \quad (E_1 + Q_1 H_1) X_1 = Q_1 D_1 + K \text{ und}$$

$$(III.1.20) \quad (E_1 + Q_1 H_1) \hat{X}_1 = Q_1 D_1.$$

*$(E_1 + Q_1 H_1)$  sei invertierbar.  $\|Q_2\|_2 \neq 0$   $\|X_2\|_1 \neq 0$ .*

*Außerdem gelte für  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ :*

$$(III.1.21) \quad \|D_2\|_1 \leq \frac{\epsilon \alpha}{\|Q_2\|_2} \text{ und } \|H_2\|_2 \leq \frac{\epsilon \beta}{\|Q_2\|_2 \|X_2\|_1}$$

*Dann gilt:*

$$(III.1.22) \quad \|X_1 - \hat{X}_1\|_1 \leq \|(E_1 + Q_1 H_1)^{-1}\|_2 \in (\alpha + \beta)$$

*für passende Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ .*

Der Beweis ist einfach.

(III.1.23) FOLGERUNG:

*Gegeben sei (III.1.9). Wir wählen dieselben*

*Bezeichnungen wie in (III.1.18).  $Q_1$  sei invertierbar.*

*Wenn  $D_2 \equiv 0$  und  $H_2 \equiv 0$ , dann gilt:*

$$X_1 = \hat{X}_1 \text{ und}$$

$$X_2 = A X_1,$$

$$\text{wobei } A = Q_2^t Q_1^{-1}.$$

Beweis:

Aus (III.1.9) folgt:

$$X_1 + Q_1 H_1 X_1 = Q_1 D_1 \text{ oder } X_1 = Q_1 (D_1 - H_1 X_1), \text{ und}$$

$$X_2 = Q_2^t (D_1 - H_1 X_1). \text{ Somit gilt: } X_2 = Q_2^t Q_1^{-1} X_1.$$

Da man in (III.1.21) bei der Abschätzung von  $\|H_2\|_2$  die zunächst unbekannte Größe  $\|X_2\|_1$  benötigt, seien hierfür die folgenden Abschätzungen angegeben:

(III.1.24) SATZ:

Gegeben sei (III.1.9)

Wir setzen:

$$A_1 := E_1 + Q_1 H_1$$

$$A_2 := Q_2 H_2$$

$$A_3 := Q_2^t H_1$$

$$A_4 := E_2 + Q_3 H_2$$

$$A_0 := A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2$$

$$B_1 := Q_1 D_1 + Q_2 D_2$$

$$B_2 := Q_2^t D_1 + Q_3 D_2$$

$A_1$  und  $A_0$  seien invertierbar. Dann gelten folgende Aussagen:

$$(III.1.25) \quad X_2 = A_0^{-1} (B_2 - A_3 A_1^{-1} B_1) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \|A_0\|_2^{-1} \{ \|B_2\|_1 + \kappa(A_1) \frac{\|A_3\|_2}{\|A_1\|_2} \|B_1\|_1 \} &\leq \|X_2\|_1 \leq \\ &\leq \|A_0^{-1}\|_2 \{ \|B_2\|_1 + \kappa(A_1) \frac{\|A_3\|_2}{\|A_1\|_2} \|B_1\|_1 \} \end{aligned}$$

für passende Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ .

Beweis:

Die Aussagen folgert man leicht aus

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 A_0^{-1} A_3 A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 A_0^{-1} \\ -A_0^{-1} A_3 A_1^{-1} & A_0^{-1} \end{bmatrix}$$

Satz (III.1.24) ist mehr von theoretischem Interesse, da die Abschätzungen (III.1.25) in praktischen Anwendungen kaum verwertbar sind. Dagegen hat der eigentlich triviale Satz (III.1.18) für die in der Praxis auftretenden großen Netze wesentlich mehr Bedeutung: Wenn es nämlich gelingt, das lineare Gleichungssystem (III.1.8) so gemäß (III.1.9) aufzuteilen, daß  $\|D_2\|_1$  und  $\|H_2\|_2$  nahe der Null sind, dann kann man statt (III.1.19) auch (III.1.20) lösen. Eine derartige Aufteilung findet man in vielen praktischen Problemen relativ leicht, wenn man beachtet, daß  $D_2$  Elemente der Form  $\frac{\partial k_a}{\partial \alpha}$  und  $H_2$  Elemente der Form  $\frac{\partial k_a}{\partial f_b}$  hat (siehe Satz (II.2.6)). Man faßt nämlich alle Bogen  $a$ , für die  $\left| \frac{\partial k_a}{\partial \alpha} \right|$  und  $\left| \frac{\partial k_a}{\partial f_b} \right|$  ( $b \in B$ ) sehr klein sind, in der mit 2 gekennzeichneten Indexmenge zusammen.

Wir wollen nun die Aussage des Satzes (III.1.23) erläutern.

Hierzu seien  $a_1 \in B$  bzw.  $a_2 \in B$  Bogen aus den mit 1 bzw. 2 indizierten Teilmengen aus  $B$ . Für die Bogen  $a_2$  wird vorausgesetzt, daß gilt:  $\frac{\partial k_{a_2}}{\partial f_b} = 0$  ( $b \in B$ ) und  $\frac{\partial k_{a_2}}{\partial \alpha} = 0$ . Satz (III.1.23) besagt, daß die Matrix  $\left( \frac{df_{a_2}}{d\alpha} \right)$  linear mit der Matrix  $\left( \frac{df_{a_2}}{d\alpha} \right)$  gekoppelt ist.

Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der Tatsache, daß für den Bogenfluß  $f$  gilt:  $f = \Delta F$  und  $F \in \mathcal{F}$ . Wenn sich also  $f_a$  ( $a \in B$ ) ändert, dann muß sich mindestens eine Komponente von  $F$  (die mit  $a$  inzidiert) ändern. Dies hat aber zur Folge, daß sich alle Bogenflüsse  $f_b$  ändern, die mit dieser Komponente von  $F$  inzidieren.

Ausgangspunkt der bisherigen Untersuchungen war die Bestimmung von  $\frac{d\bar{z}}{d\alpha}$ . Wenn nun statt  $X_1$  nur eine Näherung  $\bar{X}_1$  vorliegt, ist zu klären, welchen Einfluß diese Näherung auf  $\frac{d\bar{z}}{d\alpha}$  hat.

Seien  $X_1$  und  $\bar{X}_1$  wie in (III.1.14) und (III.1.15) bestimmt. Wir setzen

$$(III.1.27) \quad \bar{r} := v + z_1^t \bar{X}_1.$$

Für den später zu beschreibenden Algorithmus ist wichtig, daß  $r$  und  $\bar{r}$  einen "spitzen Winkel" bilden, d.h. es muß  $r^t \bar{r} > 0$  gelten. Hierzu zeigen wir:

(III.1.28) SATZ:

Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt:

$r^t \bar{r} > 0$  genau dann, wenn

$$(III.1.29) \quad \|r\|^2 > -v^t \bar{K}^t d - d^t B \bar{K}^t d$$

wobei für  $d$  gilt:  $A_1 d = z_1$  mit  $A_1 := E_1 + Q_1 H_1$ ,  $B := Q_1 B_1 + K$

Beweis:

$$\begin{aligned} r^t \bar{r} &= (v + X_1^t z_1)^t (v + \bar{X}_1^t z_1) \\ &= v^t v + v^t \bar{X}_1^t z_1 + v^t X_1^t z_1 + (X_1^t z_1)^t \bar{X}_1^t z_1 \\ &= v^t v + v^t (\bar{X}_1^t + X_1^t) z_1 + z_1^t X_1 \bar{X}_1^t z_1 \\ &= v^t v + v^t (A_1^{-1} (2B + \bar{K})^t z_1 + z_1^t A_1^{-1} B (B + \bar{K})^t A_1^{-1} z_1) \\ &= v^t v + 2v^t X_1^t z_1 + v^t \bar{K}^t (A_1^{-1})^t z_1 + z_1^t A_1^{-1} B B^t A_1^{-1} z_1 + z_1^t A_1^{-1} B \bar{K}^t A_1^{-1} z_1 \\ &= r^t r + v^t \bar{K}^t d + d^t B \bar{K}^t d. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(III.1.30) BEMERKUNG:

Die vorangegangenen Überlegungen bieten zwei Möglichkeiten zur näherungsweise Berechnung von  $\frac{d\bar{z}}{d\alpha} = r$ :

(III.1.31) Wenn  $\|K\|_1 \sim 0$ , also z.B. dann, wenn  $D_2 \equiv 0$  und  $H_2 \equiv 0$  (vergleiche (III.1.18)), so berechnet man  $\bar{X}_1$  aus (III.1.20), also nach der Formel:

$$(E_1 + Q_1 H_1) \bar{X}_1 = Q_1 D_1 \text{ und } \bar{r}$$

durch

$$\bar{r} = v + z_1^t \bar{X}_1$$

Für genügend kleines  $\|K\|_1$  gilt dann

$$r^t \bar{r} > 0.$$

(III.1.32) Kann man nicht davon ausgehen, daß  $\|K\|_1 \sim 0$  gilt, so ist eine Näherung  $\tilde{K} = K + \bar{K}$  von  $K$  zu berechnen. Die Berechnung einer solchen Näherung kann beispielsweise über den RG-Ansatz (II.2.9) (2) erfolgen. Er liefert nämlich eine Lösung  $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix}$  voller Dimension, so daß hieraus über (III.1.11)  $\hat{K} = Q_2 D_2 - Q_2 H_2 \hat{X}_2$  bestimmbar ist.  $\hat{K}$  kann dann für einige Iterationsschritte mit dem reduzierten Gleichungssystem (III.1.12) als Näherung  $\tilde{K}$  verwendet werden.  $\bar{X}_1$  berechnet sich also dann aus

$$(E_1 + Q_1 H_1) \bar{X}_1 = Q_1 D_1 + \hat{K}$$

und man setzt

$$\bar{r} = v + z_1^t \bar{X}_1.$$

### III.1.3 Ein durchführbarer Algorithmus zur Parameterkalibrierung

Wir wollen nun einen Algorithmus zur Lösung des Kalibrierungsproblems  $\hat{P}(\theta)$  angeben. Dabei wird Algorithmus (II.3.15) so modifiziert, daß die Abstiegsrichtung  $r^{(i)}$  nur näherungsweise gemäß (III.1.32) berechnet wird. Zunächst definieren wir:

$$(III.1.33) \quad \tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$i \mapsto \tau_i$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$(III.1.34) \quad \tau \text{ ist monoton wachsend, d.h. aus } i < j \text{ folgt } \tau_i \leq \tau_j.$$

$$(III.1.35) \quad \text{Für schließlich alle } i \in \mathbb{N} \text{ gilt } \tau_{i+1} = \tau_i + 1.$$

Die Folge  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  stimmt also schließlich mit den natürlichen Zahlen überein und nur die "ersten" Elemente sind u.U. teilweise untereinander gleich bzw. weisen Sprünge auf.

Zur Lösung von  $\hat{P}(\theta)$  definieren wir:

(III.1.36) ALGORITHMUS:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^1$  die Lösungsmenge von  $\hat{P}(\theta)$ , und sei  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge mit den Eigenschaften (III.1.33) - (III.1.35) und sei  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Gegeben sei weiter eine Zerlegung von  $B$  mit  $B = I \cup J$ ,  $I \cap J = \emptyset$  und  $K = K(\alpha) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$  sei wie in (III.1.11) definiert.  $\|\cdot\|$  sei die Norm in  $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$ .

(0) Bestimme Startlösung  $(F^{(0)}, \alpha^{(0)}, \delta^{(0)}) \in \mathcal{F} \times A \times L$  mit  $G(F^{(0)}, \alpha^{(0)}) = \delta^{(0)}$ .

Ist  $\delta^{(0)} = \theta$  und  $\alpha^{(0)} \in \Omega$ , dann STOP. Sonst  $i := 0$ .

Berechne Näherungswert  $\tilde{K}^{(0)}$  von  $K$  mit

$$\|\tilde{K}^{(0)} - K(\tau^{(0)})\| \leq \varepsilon_0.$$

<sup>\*</sup>) Die Indexmengen  $I$  und  $J$  entsprechen den mit 1 und 2 gekennzeichneten Teilmengen von  $B$  im vorangegangenen Abschnitt.

(1) Wenn  $\tau_i = \tau_{i+1}$ , dann setze  $\tilde{K}^{(i)} := \tilde{K}^{(i-1)}$  und gehe zu (a).

Sonst berechne  $\tilde{K}^{(i)}$  mit  $\|\tilde{K}^{(i)} - K(\alpha^{(i)})\| \leq \varepsilon_i$ .

(a) Berechne  $\frac{df_{\delta^{(i)}}(\alpha^{(i)})}{d\alpha}$  gemäß (III.1.11), d.h.

$$(E_I + Q_I H_I) \Big|_{\alpha^{(i)}} \frac{df_{\delta^{(i)}}(\alpha^{(i)})}{d\alpha} = Q_I D_I \Big|_{\alpha^{(i)}} + \tilde{K}^{(i)}$$

und anschließend an der Stelle  $\alpha^{(i)}$

$$r^{(i)} := \frac{1}{aeI} \frac{\partial \bar{z}}{\partial f_a} \frac{d(f_{\delta^{(i)}})_a}{d\alpha} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha}.$$

Die Schritte (2), (3) und (4) sind analog wie in (II.3.15).

(III.1.37) SATZ:

*Unter den Voraussetzungen des Satzes (II.3.7) konvergiert Algorithmus (III.1.36) gegen einen Lösungspunkt  $(\hat{F}, \hat{\alpha}, \theta)$  mit  $\hat{\alpha} \in \Omega$  und  $G(\hat{F}, \hat{\alpha}) = \theta$ .*

#### Beweis:

Für schließlich alle  $i \in \mathbb{N}$  wird eine immer bessere Näherung von  $K(\alpha^{(i)})$  berechnet, so daß aus Stetigkeitsgründen die Konvergenzaussage des Satzes (II.3.7) erhalten bleibt.

Kann man nicht von dem trivialen Fall  $K^{(i)} = \theta$  ausgehen, so kann die Berechnung eines Näherungswertes  $\tilde{K}^{(i)}$  von  $K(\alpha^{(i)})$  mittels eines der in II.2. angegebenen Verfahren durchgeführt werden, d.h. solange die "Steuerungsfolge"  $(\tau_i)$  konstant ist, berechnet man  $r^{(i)}$  anhand eines fehlerbehafteten Gleichungssystems niedriger Dimension (nach (1)(a)), springt jedoch  $\tau_i$ , so verwendet man zur Bestimmung von  $r^{(i)}$  bzw.  $\frac{df_{\delta^{(i)}}(\alpha^{(i)})}{d\alpha}$  den RG-Ansatz aus II.2. Gleichzeitig kann dann gemäß (III.1.11) ein neues  $K^{(i)}$  errechnet werden. (Vergleiche auch (III.1.32).)

### III.1.4 Ergebnisse der Kalibrierung

Der Algorithmus (III.1.36) wurde am Dreifachprozessor TR 440 des Regionalen Rechenzentrums Erlangen implementiert und auf Daten der Stadt Erlangen angewandt. Eine Beschreibung dieser Daten findet sich im Anhang IV.1.

Als Zielfunktion im Optimierungsproblem  $\hat{P}(\delta)$  wurde

$$(III.1.38) \quad Z(F, \alpha) = \bar{Z}^2(f(\alpha)) = \overline{\sum_{a \in \hat{I}}} (f_a(\alpha) - m_a)^2$$

gewählt. ( $\hat{I} \subset B$ ,  $f(\alpha) = \Delta^{BP} F_\delta(\alpha)$ ,  $F_\delta(\alpha) \in \mathcal{F}_P$ ). Das zugrundeliegende Transportnetzwerk basierte auf einem Weggraphen  $G(W, P)$ , wobei pro Quell-Ziel-Paar maximal vier Wege zur Verfügung standen. Wie aus IV.1 zu entnehmen ist, gingen folgende Bogen-Kostenfunktionen

$$(III.1.39) \quad k_a(f, n) = u_a(f) \cdot \left\{ v_a \left( \frac{\hat{S}_a(f)}{K_a} \right)^n + w_a \right\} + d_a$$

in das Modell ein. Für die durchgeführten Rechnungen war jedoch  $u_a(f) = \text{const}(a)$ . Dies bedeutet, daß keine unsymmetrischen Beeinflussungen wirkten (Beachte III.2 und IV.1).

Wie schon aus (III.1.39) ersichtlich, wurde nur mit einem Parameter, der Potenz  $n \in \mathbb{R}$ , gearbeitet. Die Streuparameter  $\sigma(s)$  waren für alle  $s \in O$  mit  $\sigma = \sigma(s) = 1$  vorgegeben. (Man beachte hierzu die Untersuchung über den Einfluß von  $\sigma$  auf die "Modellgüte" im Abschnitt III.2.)

Der Unteralgorithmus S in (III.1.36) bzw. (II.3.16) war ein Gleichgewichtsverfahren nach II.1 für Weggraphen. Es entsprach dem Verfahren ALGS in III.2.4. Alle Berechnungen erfolgten mit der verbesserten Fahrtenmatrix nach III.3.4.

Von besonderem Interesse war natürlich Unteralgorithmus V und hier im wesentlichen die Bestimmung der Abstiegsrichtung  $r^{(i)}$  in (III.1.36) (1). Die Auswahl der Teilmenge  $\hat{I} \subset B$  erfolgte nach folgender Vorschrift:

$$\hat{I} := \{a \in B \mid f_a(n) > M\}$$

wobei  $M > 0$  mit  $300-350$  Kfz/Std. so vorgegeben wurde, daß  $|\hat{I}| \leq 100$ . Für die Bogen  $a \in I$  lagen Zählwerte vor, wobei  $I$  so gewählt wurde, daß galt:  $I \subset \hat{I}$ .

| 1                            | 2                                 | 3                   | 4                                     | 5                                            | 6                | 7                                     | 8                        |
|------------------------------|-----------------------------------|---------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| Parameter $n \in \mathbb{N}$ | Anzahl der Quell-Ziel-Paar-Zyklen | Verteilungsfehler V | Anzahl $ I $ der Bogen mit Zählwerten | Anzahl $ \hat{I} $ der Bogen $a \in \hat{I}$ | Abstiegsrichtung | Quadratische Zielfunktion $\bar{z}^2$ | Gewichteter Fehler $E_G$ |
| 2                            | 2                                 | 8 %                 | 51                                    | 72                                           | +                | 34.310.066                            | 26 %                     |
| 2                            |                                   |                     | 59                                    | 85                                           | +                |                                       |                          |
| 2                            |                                   |                     | 68                                    | 100                                          | +                |                                       |                          |
| 2                            |                                   |                     | 36                                    | 45                                           | +                |                                       |                          |
| 2                            | 5                                 | 1 %                 | 36                                    | 45                                           | +                | 34.603.163                            | 26 %                     |
| 4                            | 2                                 | 3 %                 | 36                                    | 46                                           | +                | 27.910.680                            | 23 %                     |
| 4                            |                                   |                     | 67                                    | 100                                          | +                |                                       |                          |
| 8                            | 2                                 | 2 %                 | 64                                    | 100                                          | +                | 23.767.491                            | 21 %                     |
| 12                           | 2                                 | 1 %                 | 63                                    | 99                                           | +                | 22.597.560                            | 21 %                     |
| 16                           | 2                                 | 0.5 %               | 65                                    | 99                                           | +                | 21.998.328                            | 20 %                     |

Tabelle 4: Kalibrieren des Parameters  $n \in \mathbb{N}$  in  $k(f, n)$ .

Erläuterungen im Text. In freien Feldern gilt der darüberstehende Wert. Der gewichtete Fehler  $E_G$  und der Verteilungsfehler V sind in IV.1 definiert.

Hauptproblem bei der Bestimmung von  $r^{(i)}$  ist die Berechnung von  $\tilde{K}^{(i)}$ . Bei den vorliegenden Dimensionen des Erlanger Testnetzes stellte sich die Frage, ob nicht  $\tilde{K}^{(i)}$  im Hinblick auf  $r^{(i)}$  überhaupt vernachlässigbar war. Die in Tabelle 4 dargestellten Ergebnisse ergaben sich alle unter dem Ansatz  $\tilde{K}^{(i)} \equiv 0$ . Dieser Ansatz läßt sich durchaus rechtfertigen, denn, wie aus Spalte 6 ersichtlich, wurde bei allen Parameterwerten und allen getesteten I- bzw.  $\hat{I}$ -Sätzen die richtige Abstiegsrichtung angegeben ("+" bedeutet, daß bei Vergrößern von  $n$  die Zielfunktion  $\bar{Z}^2$  verkleinert wird). Aus Rechenzeitgründen (Berechnung von  $\frac{dZ}{da}$  für  $|\hat{I}| \approx 100$  benötigte ca.  $300$  sec, ein Gleichgewichtszyklus ebenfalls ca.  $300$  sec) wurden nur für die Potenzen  $n=2,4,8,12,16$  die Abstiegsrichtungen berechnet, wobei angenommen wurde, daß im Intervall  $[2,16]$  keine lokalen oder gar globalen Minimalstellen lagen. Bei  $n=16$  wurde das Verfahren abgebrochen, da sich  $\bar{Z}^2$  nur noch "geringfügig" änderte.

Aus Tabelle 4 ist weiter zu entnehmen, daß für  $n=16$  die besten Ergebnisse erreicht wurden. Dies bedeutet, daß die Benutzer im Mittel nur auf "Überlastungseffekte" an Kreuzungen reagieren und sich im übrigen am geographisch kürzesten Weg (unter Berücksichtigung der Mindestwartezeiten an Kreuzungen  $\hat{= w_a}$ ) orientieren, da  $k_a(f,16)$  im größten Teil des "zulässigen" Bereiches als konstant angesehen werden kann. Kostenfunktionstypen, die dem Graphen von  $k_a(f,16)$  ähneln, wurden z.B. schon von SIEGLOCH [50] und UEBERSCHÄER [51] aufgrund von Messungen und Simulationsrechnungen angegeben.

Außerdem sei darauf hingewiesen, daß der Einfluß der Potenz  $n$  auf den gewichteten Fehler  $E^G$  erheblich ist; für  $n=2$  ist  $E^G=26\%$ , für  $n=16$  jedoch  $E^G=20\%$ !

### III.2 Gleichgewichtsalgorithmen bei unsymmetrischer Jacobimatrix

#### III.2.1 Problemformulierung

An unsignalisierten Kreuzungen beeinflusst der vorfahrtsberechtigten Verkehr den wartepflichtigen, jedoch nicht umgekehrt. Ebenso gilt an signalisierten Kreuzungen, daß die Linksabbieger vom Gegenverkehr (hauptsächlich Geradeausfahrer und Rechtsabbieger) beeinträchtigt werden, aber nicht umgekehrt. Berücksichtigt man solche Effekte in der Kostenfunktion  $k_a(f, \alpha)$  des Wegewahlmodells, so kann man die in II.1 dargestellten Abstiegsverfahren zur Bestimmung von Gleichgewichten nicht mehr verwenden, denn die Jacobimatrix  $H(f, \alpha)$  ist nun nicht mehr symmetrisch. Wir sprechen deshalb bei den oben angegebenen Effekten von unsymmetrischen Beeinflussungen. Untersuchungen derartiger Problemstellungen sind bisher - in der dem Autor zugänglichen Literatur - nicht bekannt.<sup>1)</sup> Die meisten Veröffentlichungen, die sich mit Gleichgewichtswegewahlmodellen befassen, gehen von Kostenfunktionen des Typs

$$k_a = k_a(f_a)$$

aus. Die Jacobimatrix ist in diesem Fall eine Diagonalmatrix, also symmetrisch. Die Möglichkeit, daß sich Flüsse gegenseitig beeinflussen, wurden z.B. von NETTER/SENDER [29] und DAFERMOS [5] untersucht. Sie verwenden jedoch für die angegebenen Algorithmen Kostenfunktion des Typs  $k_a = k_a(f)$ , bei denen  $\frac{\partial k_a(f)}{\partial f_b} = \frac{\partial k_b(f)}{\partial f_a}$  und damit die Jacobimatrix symmetrisch ist.

Im folgenden werden Algorithmen angegeben, die auch bei nichtsymmetrischer Jacobimatrix konvergieren.

<sup>1)</sup> Im Jahr 1979 erschienen Arbeiten von BRAESS/KOCH [73] und FISK/NGUYEN [74], die unsymmetrische Beeinflussungen verschiedener Benutzerklassen untersuchen. Nur in [74] werden Lösungsverfahren angegeben. Während der Drucklegung erschien DAFERMOS [75].

### III.2.2 Diskussion des Fixpunktansatzes

Da die Darstellung und Berechnung von Gleichgewichten in Transportnetzwerken bei zugrundeliegendem Weggraph besonders einfach und übersichtlich ist, sollen die folgenden Überlegungen speziell für  $\text{TeT}^{(1)}$  mit  $G'=G(W,P)$  und  $\sigma > \theta$  durchgeführt werden. Als Parametermenge  $A$  ist  $\mathbb{R}^B$  zu wählen.

Dann sind die Kostenfunktion  $k_a$  für  $a \in B$  gemäß (I.1.31) definiert:

$$(III.2.1) \quad \begin{aligned} k_a: \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^B &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s,u) &\rightarrow k_a(s,u). \end{aligned}$$

(Für die bisher mit  $f$  bezeichnete Bogenflußvariable schreiben wir nun  $s$  und für den bisherigen Parameter  $\alpha$  nun  $u$ .)

#### (III.2.2) VORAUSSETZUNG:

Für alle  $a, b \in B$  gelte:

$$\frac{\partial k_a(s,u)}{\partial s_b} = \frac{\partial k_b(s,u)}{\partial s_a}$$

für  $(s,u) \in \mathbb{R}^B \times A$ .

Mit den in (I.2.16) eingeführten Bezeichnungen bedeutet (III.2.2), daß die Jacobimatrix  $H(s,u)$  symmetrisch bzgl.  $s$  ist. Wir nennen deshalb  $s$  den symmetrischen und  $u$  den unsymmetrischen Anteil der Kostenfunktionen  $k_a(s,u)$ .

#### (III.2.3) BEMERKUNG:

In den Anwendungen geht man üblicherweise von Kostenfunktionen  $\tilde{k}_a = \tilde{k}_a(f)$  (hier ohne Parameter) aus. Um nun Kostenfunktionen wie in (III.2.1) zu erhalten, muß man annehmen, daß es Abbildungen  $k_a: \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit:  $\tilde{k}_a(f) = k_a(f,f)$ . Außerdem muß Voraussetzung (III.2.2) für die  $k_a$  erfüllt sein, so daß die erste Variable von  $k_a$  den symmetrischen und die zweite Variable den unsymmetrischen Anteil darstellen. Ein Beispiel einer solchen

Kostenfunktion ist in (III.2.4) angegeben. In der Praxis ist

$k_a(s, u)$  auf den meisten Bogen sogar von  $u$  unabhängig, d.h

$$k_a(s, u) = \tilde{k}_a(s).$$

Im folgenden bezeichnen wir auch die Wegflußvariablen mit  $S$ .

Unter der Voraussetzung (III.2.2) gilt:

Es gibt zu jedem  $u \in A$  genau ein  $S(u) \in \mathcal{F}_P$  mit  $G(S(u), u) = \theta$  und

$S(u)$  ist stetig differenzierbar in  $A$  (siehe Sätze (I.5.7) und

(I.5.8)). Wir suchen  $\hat{u} \in A$  mit  $\Delta^{BP} S(\hat{u}) = \hat{u}$ , also ein Gleichgewicht,

bei dem symmetrischer und unsymmetrischer Anteil übereinstimmen.

Wegen Satz (I.3.10) gibt es ein solches  $\hat{u} \in A$ , denn da  $k_a(s, u)$

für alle  $a \in B$  stetig auf  $\mathbb{R}_+^B \times \mathbb{R}_+^B$ , ist auch die Abbildung

$$s \rightarrow k_a(s, s)$$

stetig auf  $\mathbb{R}_+^B$ .

Unter Beachtung der Schreibweise in (I.2.11) gilt also: Es gibt

$S \in \mathcal{F}_P$  mit

$$S = \Phi(S, \Delta^{BP} S) = S(\Delta^{BP} S).$$

Somit gibt es  $\hat{u} \in \mathbb{R}_+^B$  mit

$$\Delta^{BP} S(\Delta^{BP} S) = \Delta^{BP} S(\hat{u}) = \hat{u} = \Delta^{BP} S.$$

Wie lassen sich solche  $\hat{u} \in A$  bestimmen?

Zunächst liegt es nahe, mit den Kostenfunktionen  $k_a(s, s) = k_a(f, f)$

( $s = f \in \mathbb{R}_+^B$ ) zu arbeiten und Gleichgewichte über die Fixpunktcharakterisierung

risierung

$$S = \Phi(S, s)$$

mit  $s = \Delta^{BP} S$  zu ermitteln.

Die übliche Fixpunktiteration ist jedoch i.a. nicht brauchbar.

Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden.

(III.2.4) BEMERKUNG:

Bei unsymmetrischer Jacobimatrix konvergiert die Fixpunktiterationsfolge

$$F^{(i+1)} = \Phi(F^{(i)}), \quad \wedge^{BP}(\pi^{(i)}) =: \tilde{\Phi}(F^{(i)}),$$

i.a. nicht. Es können sogar mehrere Fixpunkte auftreten. Hierzu folgende Beispiele:

(III.2.5) BEISPIEL:

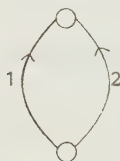


Abbildung 5

Gegeben sei der nebenstehende einfache Graph mit Bögen (= Wege) 1 und 2 und folgenden Kostenfunktionen:

$$k_1(F) = F_1 + a_1 F_2$$

$$k_2(F) = F_2^3$$

mit  $F_1 + F_2 = 2$ . Im Fall  $a_1 = 0$  wurde bereits in (II.1.13) gezeigt, daß die Fixpunktiteration nicht konvergiert.

Im Fall  $a_1 = 0.6$ , d.h. bei unsymmetrischer Jacobimatrix  $H(f, \alpha)$  gilt dann für  $\sigma = 1$ :

$$\tilde{\Phi}_1(F) = \frac{e^{-F_1 - 0.6F_2}}{e^{-F_1 - 0.6F_2} + e^{-(2-F_1)^3}}$$

und man errechnet (gerundet):

$$1.969 = \tilde{\Phi}(0.241) \quad \text{und}$$

$$0.241 = \tilde{\Phi}(1.969).$$

Diese Zahlen legen die Vermutung nahe, daß auch im unsymmetrischen Fall die Fixpunktiteration nicht für jeden Startwert konvergiert.

(III.2.6) BEISPIEL:

Wir betrachten denselben Graphen wie in Beispiel (III.2.5), jedoch mit den Kostenfunktionen

$$k_1(F) = F_1 + 3F_2$$

$$k_2(F) = 5F_1 + F_2$$

Dann hat  $\tilde{\Phi}_1(F_1)$  folgende Gestalt:

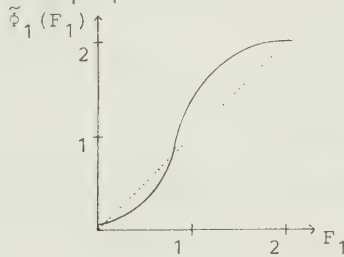


Abbildung 6: Graph der Funktion  $\tilde{\Phi}_1(F_1)$

Man erkennt, daß in diesem Fall drei verschiedene Fixpunkte existieren. Durch Fixpunktiteration lassen sich i.a. nur die Fixpunkte  $\hat{F}_1 = 0.048$  und  $\hat{F}_1 = 1.999$  erreichen (je nach Wahl des Startwertes).

### III.2.3 Algorithmen

Wir wollen nun einen Lösungsansatz zur Bestimmung von Gleichgewichten bei unsymmetrischer Jacobimatrix diskutieren, der auf der bisher dargestellten Theorie beruht. Es gilt nämlich:  $\hat{u} \in A$  erfüllt  $\hat{u} = \Delta^{BP} S(\hat{u})$  genau dann, wenn  $\hat{u}$  Lösung von

$$(III.2.7) \quad \min_{(s,u)} \|s-u\|_2^2$$

$$G(s,u) = 0$$

$$s = \Delta^{BP} S$$

$$u \in A \quad (S > 0)$$

ist.  $\|\cdot\|_2$  bezeichnet die euklidische Norm; wir betrachten also in (III.2.7) die Zielfunktion

$$\bar{z}(\Delta^{BP} S, u) = \|s-u\|_2^2.$$

Das Optimierungsproblem (III.2.7) kann mit Algorithmus (II.3.15) gelöst werden. Hauptschwierigkeit ist dabei die Bestimmung von  $\frac{d\bar{z}}{du}$ . Gerade bei Anwendungen dieser Art treten jedoch relativ viele unsymmetrische "Störvariable"  $u_a$  ( $a \in B$ ) auf, so daß der Rechenaufwand zur Bestimmung von  $\frac{d\bar{z}}{du}$  unvermeidbar hoch wäre. (Man beachte jedoch, daß nicht unbedingt die Anzahl der unsymmetrischen "Störungen" gleich  $|B|$  sein muß.)

Betrachten wir noch einmal die wesentlichen Elemente von (II.3.15) zur Lösung von (III.2.7):

Wenn der Algorithmus (II.3.15) konvergiert, dann erzeugt er eine Folge

$$(s^{(n)}, u^{(n)}, \delta^{(n)}) \in \mathcal{F}_p \times A \times L$$

mit

$$(III.2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{BP}_S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} =: \hat{x} :=: \Delta^{BP} \hat{x} \text{ und}$$

$$(III.2.9) \quad G(\hat{x}, \hat{x}) = 0 \quad \text{und}$$

$$(III.2.10) \quad \begin{cases} \|G(S^{(n)}, u^{(n)})\| \geq \|G(S^{(n+1)}, u^{(n+1)})\| & \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = 0. \end{cases}$$

(III.2.8) legt es nahe zu fragen, ob man nicht

$$(III.2.11) \quad u^{(n)} = \Delta^{BP}_S(n)$$

setzen darf, ohne die Konvergenz des Algorithmus zu beeinträchtigen.

Hierdurch könnte man den Unteralgorithmus V in (II.3.15) erheblich vereinfachen. Unter den Voraussetzungen des folgenden Satzes läßt sich ein Algorithmus mit dieser günstigen Eigenschaft formulieren:

(III.2.12) SATZ:

*Seien  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $G' = G(W, P)$  und  $\sigma > 0$  und*

*$A = \mathbb{R}^B$ . Für alle  $u \in A$  und alle  $s = \Delta^{BP}_S$ ,  $s \in \mathcal{F}_P$ , sei*

*$H(s, u)$  bzgl.  $s$  symmetrisch und positiv semidefinit.*

*Dann ist die stetig differenzierbare Abbildung*

$$(III.2.13) \quad \Delta^{BP}_S: \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^B$$

$$u \rightarrow \Delta^{BP}_S(u)$$

*mit  $G(S(u), u) = 0$  definiert. Es gelte weiter:*

$$(III.2.14) \quad \left\| \frac{d\Delta^{BP}_S(u)}{du} \right\| \leq K < 1$$

*für alle  $u \in A$  und eine Norm  $\|\cdot\|$  in  $\mathbb{R}^B$ .*

*Dann gibt es genau einen Fixpunkt  $\hat{u} \in \mathbb{R}^B_+$  von  $\Delta^{BP}_S$  mit  $\Delta^{BP}_S(\hat{u}) = \hat{u}$ , und der folgende Algorithmus konvergiert gegen  $\hat{u} \in A$ :*

(III.2.15) ALGORITHMUS:

- (0)  $(S^{(\emptyset)}, u^{(\emptyset)}) \in \mathcal{F}_P \times \mathbb{R}^B$ ,  $k := \emptyset$   
 (1) Berechne  $S(u^{(k)})$  mit  $G(S(u^{(k)}), u^{(k)}) = \emptyset$   
 (2) Setze  $u^{(k+1)} := \Delta^{BP}_S(u^{(k)})$ .  $k := k+1$ . Gehe zu (1).

Beweis:

Siehe z.B. WERNER [71], S. 68 Satz 1.1, S. 71 Satz 1.2 .

Die Berechnung von  $S(u^{(k)})$  entspricht einer exakten Gleichgewichtsberechnung im "symmetrischen Fall" und ist deshalb sehr aufwendig. Wir suchen deshalb nach einer Methode, die ähnlich wie Algorithmus (II.3.15) sukzessive das Niveau  $\delta$  von  $G(S(u), u) = \delta$  verbessert und nicht wie Algorithmus (III.2.15) zu  $u^{(k)}$  ein exaktes Gleichgewicht berechnet.

Im folgenden sei

$$u = \Delta^{BP}_U$$

mit UEA und die Parametermenge  $A$  sei jetzt gleich  $\mathbb{R}^P$ . Wir haben dann Kostenfunktionen

$$\bar{k}_p(S, U) = \overline{\lim_{a \in P}} k_a(\Delta^{BP}_S, \Delta^{BP}_U) .$$

(III.2.16) SATZ:

Seien  $T \in \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $G' = G(W, P)$  und  $\sigma > 0$  und  $A = \mathbb{R}^P$ . Für alle  $U \in A$  und alle  $s = \Delta^{BP}_S, s \in \mathcal{F}_P$  sei  $H(s, u)$  symmetrisch (bzgl.  $s$ ) und positiv semidefinit für  $(s, U) \in \mathbb{R}^B \times A$ . Dann ist die stetig differenzierbare Abbildung  $S: \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P$  mit  $G(S(U), U) = \emptyset$  definiert und es gelte weiter:

$$(III.2.17) \quad \left\| \frac{dS(U)}{dU} \right\|_S \leq K < 1 . \quad *)$$

Für die Kostenfunktionen  $\bar{k}_p$ ,  $p \in P$  gelte für alle  $(S, U) \in \mathcal{F}_P \times A$ :

$$(III.2.18) \quad \frac{\partial \bar{k}_p(S, U)}{\partial S_p} \geq \frac{\partial \bar{k}_q(S, U)}{\partial S_p} , \quad p, q \in P_w, w \in W .$$

\*)  $\|\cdot\|_S$  sei die Spaltensummennorm. Zugehörig zu  $\|\cdot\|_1$  !  
 (Siehe WERNER [71].)

Dann gibt es genau einen Fixpunkt  $\hat{U} \in \mathcal{F}_P$  von  $S$  mit  $S(\hat{U}) = \hat{U}$  und der folgende Algorithmus konvergiert gegen  $\hat{U} \in \mathcal{F}_P$ . Genauer gilt für die vom Algorithmus (III.2.19) erzeugte Folge  $(S^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^{(n)} - \hat{U}\|_1 = 0$$

mit der  $L_1$ -Norm  $\|\cdot\|_1$ .

(III.2.19) ALGORITHMUS:

(0) Sei  $(S^{(0)}, U^{(0)}) \in \mathcal{F}_P \times \mathcal{F}_P$ ,  $k := 0$ ,  $w^{(0)} \in W^*$

(1) Berechne zu  $w^{(k)} \in W$  und für alle  $p \in P_w^{(k)}$

$$D_p^{(k)} := \phi_p(S^{(k)}, U^{(k)}) - S_p^{(k)}$$

$$D_q^{(k)} := 0 \text{ für } q \notin P_w^{(k)}$$

(2) Berechne  $S^{(k+1)}$  mit  $S^*(S^{(k+1)}, U^{(k)}) := \min_{\alpha \in [0, 1]} S^*(S^{(k)} + \alpha D^{(k)}, U^{(k)})$

(3) Setze  $U^{(k+1)} := S^{(k+1)}$ ,  $k := k+1$ . Gehe zu (1).

wobei  $\phi$  in (I.2.11) definiert ist und  $S^*$  die Stammfunktion

zu  $(k_a)_{a \in B}$  gemäß (I.2.20) ist. Sie wird dort jedoch mit  $S$  bezeichnet.

Beweis: O.B.d.A.  $\sigma(s) = 1$  für  $s \in O$ .

Für die Abbildung  $\phi_P: \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P$

$$\text{mit } \phi_P(S, U) := \frac{N_w e^{-\bar{k}_P(S, U)}}{\sum_{q \in P_w} e^{-\bar{k}_q(S, U)}} \quad \text{gilt zunächst}$$

$$(III.2.20) \quad \frac{\partial \phi_P(S, U)}{\partial S_P} = \phi_P(S, U) \left[ \frac{- \sum_{q \in P_w} \left[ \frac{\partial \bar{k}_P(S, U)}{\partial S_P} - \frac{\partial \bar{k}_q(S, U)}{\partial S_P} \right] e^{-\bar{k}_q(S, U)}}{\sum_{q \in P_w} e^{-\bar{k}_q(S, U)}} \right]$$

\*) die Menge der Quell-Ziel-Paare  $W$  werde zyklisch durchlaufen

Also gilt wegen Voraussetzung (III.2.18), daß

$$\frac{\partial \phi_p(S, U)}{\partial S_p} \leq \emptyset' \text{ für alle } (S, U) \in \mathcal{T}_p \times \mathcal{F}_p.$$

Somit gilt für  $\hat{S} := S(U)$ , UEA beliebig, zunächst nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\frac{\phi_p(\hat{S}, U) - \phi_p(S^{(k)}, U)}{\hat{S}_p - S_p^{(k)}} \leq \emptyset' < 1.$$

Wenn  $\hat{S}_p > S_p^{(k)}$  ist, folgt:

$$\phi_p(\hat{S}, U) - \phi_p(S^{(k)}, U) < \hat{S}_p - S_p^{(k)}$$

Da aber  $\phi_p(\hat{S}, U) = \hat{S}_p$  ist, folgt:

$$\phi_p(S^{(k)}, U) - S_p^{(k)} > \emptyset'.$$

Wir haben also gezeigt: Für alle  $p \in P_w$  mit

$$(III.2.21) \quad \hat{S}_p > S_p^{(k)} \text{ ist } \phi_p(S_p^{(k)}, U) > S_p^{(k)}$$

Ähnlich zeigt man:

$$(III.2.22) \quad \hat{S}_p < S_p^{(k)} \text{ impliziert } \phi_p(S_p^{(k)}, U) < S_p^{(k)}$$

Da nun  $S^{(k+1)}$  über (III.2.19) (2) errechnet wird, muß dann für alle  $p \in P_w$  gelten:

$$(III.2.23) \quad \begin{aligned} &\text{entweder } \hat{S}_p \geq S_p^{(k+1)} \geq S_p^{(k)} \\ &\text{oder } \hat{S}_p \leq S_p^{(k+1)} \leq S_p^{(k)}, \end{aligned}$$

weil das Minimum von  $S^*$  über  $\mathcal{T}_p$  gerade  $\hat{S}$  charakterisiert.

Somit gilt für jede Komponente  $p \in P_w$ :

$$|\hat{S}_p - S_p^{(k+1)}| + |S_p^{(k+1)} - S_p^{(k)}| = |\hat{S}_p - S_p^{(k)}|.$$

Hieraus folgt für die  $L_1$ -Norm  $\|\cdot\|_1$ :

$$(III.2.24) \quad \|\hat{S} - S^{(k+1)}\|_1 + \|S^{(k+1)} - S^{(k)}\|_1 = \|\hat{S} - S^{(k)}\|_1.$$

Dies gilt für alle UEA!

Mit  $U^{(k+1)} = S^{(k+1)}$  gilt nun wegen (III.2.17):

$$\begin{aligned} \|S(U^{(k+1)}) - S^{(k+1)}\|_1 &\leq \|S(U^{(k+1)}) - S(U^{(k)})\|_1 + \|S(U^{(k)}) - S^{(k+1)}\|_1 \\ &< \|U^{(k+1)} - U^{(k)}\|_1 + \|S(U^{(k)}) - S^{(k+1)}\|_1 \\ &= \|S^{(k+1)} - S^{(k)}\|_1 + \|S(U^{(k)}) - S^{(k+1)}\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III.2.24)} \\ &= \|S(U^{(k)}) - S^{(k)}\|_1. \end{aligned}$$

Man erkennt nun leicht, daß sogar gilt:

$$\text{(III.2.25)} \quad \|S(U^{(k)}) - S^{(k)}\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Denn angenommen  $\|S(U^{(k)}) - S^{(k)}\|_1 \rightarrow \alpha > 0$ , dann hätte die Folge  $(S^{(k)})$  einen Grenzwert  $S^\infty$  mit

$$S^\infty = U^\infty + S(U^\infty).$$

Da jedoch der Algorithmus (III.2.19) bei festem  $U$  mit dem konvergenten Algorithmus ALGS (II.1.17) identisch ist, würde der Algorithmus für den Startwert  $(S^\infty, U^\infty)$  einen neuen Punkt  $S'$  erzeugen mit

$$\|S(U^\infty) - S'\|_1 < \alpha.$$

Mit Stetigkeitsargumenten folgert man nun leicht einen Widerspruch zur Annahme.

Die Behauptung ergibt sich nun aus folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|S(\hat{U}) - S^{(k)}\|_1 &\leq \|S(\hat{U}) - S(U^{(k)})\|_1 + \|S(U^{(k)}) - S^{(k)}\|_1 \\ &\leq K \|\hat{U} - U^{(k)}\|_1 + \|S(U^{(k)}) - S^{(k)}\|_1. \end{aligned}$$

Fassen wir nochmals die wesentlichen Elemente der beiden Algorithmen (III.2.15) und (III.2.19) zusammen:

Algorithmus (III.2.15) entspricht einer einfachen Fixpunktiteration mit der (exakten) Gleichgewichtsfunktion  $S(u)$ .

Algorithmus (III.2.19) führt zwar auch eine einfache Fixpunktiteration durch, jedoch erfolgt ein "Fixpunktschritt" (III.2.19) (3) sofort nach jedem "symmetrischen Gleichgewichtsschritt" (d.h. Bestimmung einer Abstiegsrichtung wie in (II.1.17) und einer zugehörigen Schrittweite bei festem unsymmetrischen Anteil pro Quell-Ziel-Paar). Anders gesagt: Während einer (symmetrischen) Gleichgewichtsberechnung wird sukzessive der unsymmetrische Anteil dem symmetrischen angepaßt. Bei konstant gehaltenem unsymmetrischen Anteil entspricht dieser Algorithmus dem Algorithmus (II.1.17)!

#### (III.2.26) BEMERKUNG:

Wie bereits in (I.5.8) gezeigt, liefert der Satz über implizite Funktionen die Ableitung

$$(III.2.27) \quad - \frac{dS(u)}{du} = \left[ \frac{\partial G(S(u), u)}{\partial S} \right]^{-1} \frac{\partial G(S(u), u)}{\partial u}$$

und außerdem ist im Hinblick auf (III.2.14)

$$(III.2.28) \quad \frac{d\Delta^{BP} S(u)}{du} = \Delta^{BP} \frac{dS(u)}{du}.$$

Formel (III.2.27) gilt ebenso für  $u \in \mathbb{R}^P$  statt  $u \in \mathbb{R}^E$ !

Dann gilt weiter:

$$(III.2.29) \quad \left\| \frac{dS(u)}{du} \right\|_2 \leq \left\| \left( \frac{\partial G}{\partial S} \right)^{-1} \right\|_1 \left\| \frac{\partial G}{\partial u} \right\|_2$$

Für passende Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ .

Wenn also  $\left\| \frac{\partial G}{\partial u} \right\|_2$  genügend klein ist, dann ist auch  $\left\| \frac{dS(u)}{du} \right\|_2$  genügend klein, d.h. wenn die unsymmetrischen Beeinflussungen nicht u groß sind, gelten auch die Kontraktionsbedingungen (III.2.14) bzw.

(III.2.17)

### III.2.4 Ergebnisse und Vergleich verschiedener Gleichgewichts- algorithmen

Wie aus dem Anhang IV.1 zu entnehmen ist, wurde im Erlanger Testnetz mit Kostenfunktionen folgenden Typs gearbeitet:

$$k_a(f) = u_a(f) \cdot s_a(f) + d_a.$$

Eingehende Parameter blieben für die unten betrachteten Rechnungen konstant und werden deshalb in den Kostenfunktionen nicht explizit angegeben. Im Sinne der in III.2 eingeführten Unterscheidung von symmetrischem und unsymmetrischem Anteil ergibt sich dann folgender Ansatz für die Kostenfunktionen:

$$k_a(s,u) = u_a(u) \cdot s_a(s) + d_a.$$

Aufgrund der in IV.1 angegebenen Eigenschaften von  $s_a$  und  $u_a$  überlegt man sich leicht, daß die Jacobimatrix

$$H(s,u) = \left[ \frac{\partial k_a(s,u)}{\partial s_b} \right]_{a,b \in B}$$

symmetrisch und positiv semidefinit ist für alle  $(s,u) \in \mathbb{R}_+^B \times \mathbb{R}^B$ .

Die Algorithmen (II.1.17) und (III.2.19) wurden am Dreifachprozessor TR 440 des Regionalen Rechenzentrums Erlangen implementiert und anhand Erlanger Daten getestet. Zum Vergleich wurden auch die Verfahren von DAFERMOS [5] und NGUYEN [9] ( $\sigma = \theta$ ) mit den gleichen Daten gerechnet. Wir bezeichnen im folgenden den Algorithmus (II.1.17) mit ALGS, den Algorithmus (III.2.19) mit ALGU, das Verfahren von DAFERMOS mit DAFE und die NGUYEN'sche Methode mit NGUY. Alle Berechnungen erfolgten mit der nach (III.3.4) verbesserten Fahrtenmatrix. ALGS, ALGU und DAFE (für  $\sigma = \theta$ !) arbeiten im Weggraphen. Sie orientieren sich alle an der assoziierten Zielfunktion  $S$  (siehe (I.2.22), (2)), arbeiten die Quell-Ziel-Paare zyklisch ab und unterscheiden sich eigentlich nur durch die gewählte Abstiegsrichtung.

DAFE erhält pro Quell-Ziel-Paar eine Abstiegsrichtung durch den teuersten (t) und den billigsten (b) Weg. Dann wird von t nach b so viel Fluß umgelagert (unter Beachtung der Flußbedingungen), daß S minimal wird (vgl. II.1: CS-Ansatz in  $G(W,P)$ ).

ALGS und ALGU berücksichtigen bei der Bestimmung einer Abstiegsrichtung (pro Quell-Ziel-Paar) sämtliche Wege durch den Ansatz:  $d(F) = \phi(F) - F$  (siehe (II.1.17) (1) und (I.2.11)). Dies gilt auch für ALGU, der in (III.2.19) (3) noch den Schritt  $U^{(k+1)} := S^{(k+1)}$  nachschaltet. Die Schrittweitenbestimmung erfolgt in ALGS und ALGU nach gleichen Kriterien.

Zum empirischen Vergleich dieser drei Algorithmen wurden durch ein Sukzessivumlegungsverfahren (siehe HENSEL [47]) 4 bzw. 8 Wege pro Quell-Ziel-Paar berechnet. Unsere Erfahrung mit den Erlanger Testdaten zeigte, daß Gleichgewichtsverfahren mit iterativer Wegberechnung, wie sie z.B. von LEVENTHAL et al. [8] oder LEBLANC et al. [7] vorgeschlagen wurden, im Vergleich zu empirisch gewonnenen Zählwerten, kaum bessere Ergebnisse bringen.

Das Verfahren von NGUYEN arbeitet im Bogengraphen (mit  $\sigma=\emptyset!$ ), orientiert sich ebenfalls an S, dekomponiert nach Quellen und erhält seine Abstiegsrichtung durch Auswahl eines geeigneten Zyklus. Die Schrittweite wird wieder so bestimmt, daß S minimal wird (vgl. II.1: CS-Ansatz in  $G(W,G)$ ).

Der aufwendigste Teil bei allen vier Algorithmen ist die Bestimmung der Schrittweite. Bei ihrer Implementation wurde deshalb bei allen Verfahren ein Such- bzw. Abtastalgorithmus zur Errechnung der Schrittweite eingesetzt. Bei ALGS und ALGU wurde nach jedem Quell-Ziel-Paar-Zyklus die Schrittweite halbiert, wenn S nicht verkleinert

wurde. In NGUY erfolgte die Schrittweitenbestimmung mit Hilfe der Golden-Section-Methode (siehe ZANGWILL [72]) und DAFE grenzte hierzu die Nullstelle der Ableitung ein.

Ein Vergleich dieser Algorithmen findet sich in Tabelle 5.

|      | Anzahl der Quell-<br>Ziel-Paar-Zyklen | mittlere Rechenzeit<br>pro Quell-Ziel-Paar-<br>Zyklus | Rechenzeit für die<br>Wegbestimmung | gewichteter Fehler<br>$E_G^{(4)}$ | gewichteter Fehler<br>$E_G^{(4)}$<br>$E_{800}^{(4)}$ | Gütemaß $E^{(4)}$ | Verteilungsfehler $V^{(4)}$ | assoziierte Ziel-<br>funktion $1)$ | Anzahl der Wege |    |
|------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------|------------------------------------|-----------------|----|
| ALGS | 4                                     | 300 sec                                               | 4800 sec                            | 20 %                              | 17 %                                                 | 4.0               | 5 %                         | $43011 \cdot 10^3$                 | 4               | 6) |
| ALGU | 3                                     | 600 sec                                               | 9600 sec                            | 19 %                              | 16 %                                                 | 3.7               | 5 %                         | $43500 \cdot 10^3$                 | 8               | 7) |
| DAFE | 4                                     | 800 sec                                               | 9600 sec                            | 22 %                              | 19 %                                                 | 3.8               | -                           | $43211 \cdot 10^3$                 | 8               |    |
| NGUY | 4                                     | 250 sec                                               | 1200 <sup>3)</sup> sec              | 23 %                              | 20 %                                                 | 3.8               | -                           | $42744 \cdot 10^3$                 | -               | 2) |

Tabelle 5: Vergleich der Algorithmen

- 1) Assoziierte Zielfunktion ist in jedem Fall  $K(I.2.20)$ ! Man beachte, daß bei ALGS und ALGU zu  $K(F, \alpha)$  noch der integrierte  $\ln$ -Term  $L(F, \alpha)$  (I.2.15) hinzukommt. Der Wert von  $L$  wurde jedoch aus Gründen der Vergleichbarkeit in der vorletzten Spalte nicht mit aufaddiert.
- 2) Als Startlösung lagen Optimalroutenbäume einer vorangegangenen Rechnung vor. Deshalb relativ schnelle Konvergenz (250 sec.).
- 3) Zur Bestimmung einer Startlösung benötigt man i.a. einen Optimalroutenbaum pro Quelle.
- 4) Siehe Anhang IV.1.
- 5) Geschätzter Wert, da keine entsprechenden Daten vorlagen.
- 6)  $\sigma=1$ . Die besten Ergebnisse erreichte ALGS für  $\sigma=1$ .
- 7)  $\sigma=10$ ,  $\beta=0.0005/\text{Std.}$ , siehe Anhang IV.1

Für die Algorithmen ALGS, ALGU und DAFE sind vor jeder Gleichgewichtsbestimmung alternative Wege für jedes einzelne Quell-Ziel-Paar zu bestimmen. Derartige Wegberechnungen mit Kürzestweg-Verfahren sind relativ aufwendig und erhöhen somit die Rechenzeit von ALGS, ALGU und DAFE erheblich. NGUY hingegen benötigt pro Quell-Ziel-Paar nur einen Weg als Startlösung (Optimalroutenbaum). Wenn bei allen Gleichgewichtsalgorithmen nur wenige Quell-Ziel-Paar-Zyklen durchlaufen werden, dann schneidet NGUY bzgl. der Rechenzeit am günstigsten ab. Andererseits hat NGUY folgende Nachteile:

1. Nach der Gleichgewichtsiteration sind die belasteten Wege pro Quell-Ziel-Paar nicht bekannt. (Diese werden bei bestimmten Planungsverfahren benötigt.)
2. Aus Abbildung 8 ist ersichtlich, daß NGUY bei dem ausgewählten Testbeispiel schlechtere Ergebnisse liefert als die übrigen Algorithmen.

Insbesondere war zu erwarten, und dies hat sich auch bestätigt, daß DAFE bei vielen Wegen pro Quell-Ziel-Paar, etwa wie in Tabelle 5 bei 8 Wegen, in den ersten Quell-Ziel-Paar Zyklen schlechter konvergiert als ALGS, da erst nach frühestens 4 Zyklen jeder Weg vom Verfahren einmal angesprochen werden kann.

Die Abbildungen 7 bis 9 zeigen weitere Eigenschaften der Algorithmen ALGS und ALGU. Prinzipiell zeigte ALGU bei dem relativ kleinen "unsymmetrischen Einflußfaktor"  $\beta = 0.0005$  (siehe IV.1) ähnliches

Verhalten wie ALGS. So ist z.B. die Konvergenzgeschwindigkeit, gemessen am Verteilungsfehler V (siehe IV.1) in den ersten Quell-Ziel-Paar-Zyklen recht groß und wird dann immer kleiner.

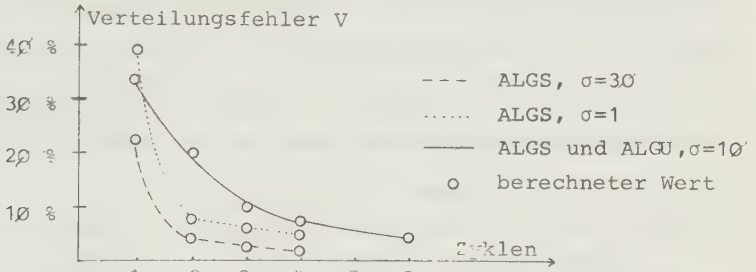


Abbildung 7: Einfluß der Zyklenzahl auf den Verteilungsfehler V.

Abbildung 8 zeigt das Verhalten des gewichteten Fehlers  $E^G$  (siehe IV.1) in Abhängigkeit von der Zyklenzahl. Insbesondere kann man erkennen, daß der Fehler der Startlösung (Ergebnis einer Sukzessivumlegung) immer größer ist als der Fehler nach einigen Gleichgewichtszyklen.

Man könnte also sagen, daß sich der "Durchschnittsbenutzer" bei seiner Routerwahl an Gleichgewichtskriterien orientiert. (Man beachte hierzu die Theorie von DAERMOS und SPARROW [4][5], bei der Gleichgewichtszustände unter gewissen Voraussetzungen mit sog. benutzer-optimalen Netzzuständen zusammenfallen.)

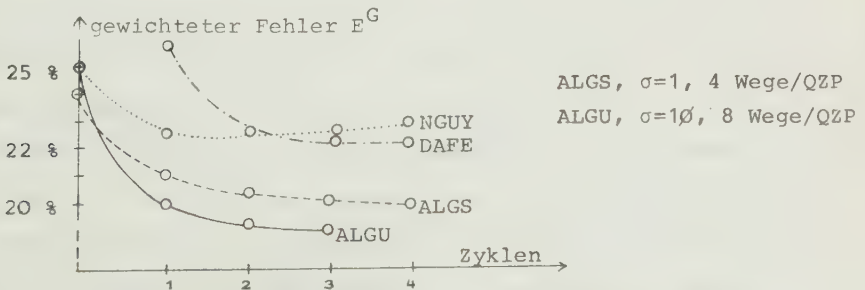


Abbildung 8: Einfluß der Zyklenzahl auf den gewichteten Fehler  $E^G$ .

Abbildung 9 zeigt das Verhalten des gewichteten Fehlers  $E^G$  bei Variation von  $\sigma$ .

Beachtet man weiter die schlechteren Ergebnisse bei  $E^G$  von NGUY und DAFE (in beiden Fällen ist  $\sigma \neq 0!$ ), so kann man sogar sagen, daß die individuell unterschiedliche Routeneinschätzung der einzelnen Benutzer unbedingt durch einen Streuterm (etwa  $\sigma \ln F_p$ , wie in (I.1.31)) zu berücksichtigen ist.

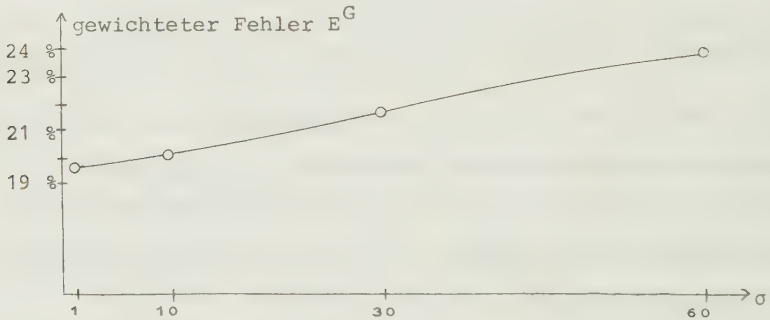


Abbildung 9: Einfluß des Streuparameters  $\sigma$  auf den gewichteten Fehler  $E^G$ .

### III.3 Korrektur und Fortschreibung der Fahrtenmatrix

#### III.3.1 Problemformulierung

Ein wesentlicher Teil der Eingabedaten bei den hier beschriebenen Wegewahlmodellen sind die Nachfragebeziehungen, die in einer sog. Fahrtenmatrix zusammengefaßt sind. Die Erstellung einer solchen Matrix ist jedoch häufig nur mit hohem finanziellen Aufwand möglich (z.B. per Haushaltsbefragung). Außerdem sind die Daten teilweise stark fehlerbehaftet, weil i.a. immer von einer Stichprobe hochgerechnet wird. Relativ billig und einfach ist dagegen die Zählung von Querschnitts- und Knotenströmen im zu untersuchenden Verkehrsnetz. Es stellen sich somit die Fragen, ob man nicht einerseits fehlerbehaftete Fahrtenmatrizen über empirisch ermittelte Verkehrszählwerte aufbessern und andererseits auf der Basis einmal erfolgter empirischer Erfassung der Nachfragen für die folgenden Zeiträume die neuen Fahrtenmatrizen mittels solcher Zählungen bestimmen kann. Einen Überblick über bereits untersuchte Methoden zur Bestimmung von Fahrtenmatrizen auf der Grundlage von Verkehrszählungen gibt die Veröffentlichung von WILLUMSEN [39]. Alle dort dargestellten Ansätze beruhen auf Kombinationen von Verteilungs- und Wegewahlmodellen. Im Rahmen dieser Arbeit sind besonders diejenigen Verfahren interessant, die mit Gleichgewichtswegewahlmodellen arbeiten. Ansätze dieser Art gibt es von NGUYEN [30][31] und JÖRNSTEN und NGUYEN [26]. Diese Autoren gehen davon aus, daß an jedem Bogen des Netzes ein Zählwert vorliegt und der so gemessene Flußzustand ein Verkehrsgleichgewicht ist. In [30] werden die Nachfragen (im Rahmen eines Gleichgewichtsansatzes) so bestimmt, daß die sich ergebende Verkehrsarbeit (= Summe über alle Quell-Ziel-Paare der Produkte aus Reisezeiten und Nachfragen) der

gemessenen Verkehrsarbeit (= Summe über alle Bogen der Produkte der Bogenreisezeiten und der Bogenlasten) entspricht. Da für die unabhängigen Variablen, die Nachfrage, kein weiteres Gesetz gilt (insbesondere kein Verteilungsgesetz), gibt es keine eindeutig bestimmte Lösung. In [31] wird das Konzept von [30] so modifiziert, daß auf eine genaue Kenntnis der Bogenkostenfunktionen verzichtet werden kann. Der Ansatz [26] ist gegenüber [30] so erweitert, daß nun eine Fahrtenmatrix mit maximaler Entropie (vgl. WILSON [52]) bestimmt wird, wobei wiederum der aus der Fahrtenmatrix resultierende Fluß dem gemessenen Gleichgewichtsfluß entsprechen muß. Parallel zu den Veröffentlichungen [30][31] und [26] wurde vom Autor im Rahmen dieser Arbeit über Parameterschätzung ein weiterer Ansatz zur Bestimmung von Fahrtenmatrizen aus Verkehrszählungen entwickelt. Die wesentlichen Unterschiede zu den oben genannten Arbeiten sind darin zu sehen, daß keine "vollständige" Verkehrszählung vorliegen muß und die Variablen hier nicht die Nachfragen selbst, sondern die Quell- und/oder Zielstärken sind.

### III.3.2 Vereinfachte Berechnung der auftretenden Gradienten

In diesem Absatz soll eine einfach zu berechnende Formel für die Ableitung des Flusses nach den Parametern "Quell- und/oder Zielstärken" hergeleitet werden.

Zur Darstellung unserer Ergebnisse wählen wir (jedoch ohne Zwang) ein Transportnetzwerk  $TE \mathcal{T}^{(1)}$  mit  $G'=G(W,P)$  und  $\sigma > 0$ , d.h. wir wollen einen Weggraphen zugrunde legen.

Die Parametermenge  $A$  sei aus  $\mathbb{R}_+^O \times \mathbb{R}_+^D$ , d.h. Parametervektor ist nun  $\alpha := (O, D) \in A$ . Wir betrachten im folgenden eine Funktion  $N$ , die den Parametern  $(O, D) \in A$  einen Nachfragevektor  $N(O, D)$  zuordnet:

$$(O, D) \rightarrow N(O, D).$$

$N(O, D)$  nennt man auch Verteilungsmodell. Üblicherweise fordert man folgende Knotenbedingungen:

$$\overline{\sum_{t \in D}} N_{st}(O, D) = O_s \quad (seO),$$

$$\overline{\sum_{s \in O}} N_{st}(O, D) = D_t \quad (teD).$$

Hieraus folgt, daß  $\overline{\sum_{s \in O}} O_s = \overline{\sum_{t \in D}} D_t$ . Somit kann eine der Variablen  $O_s$  bzw.  $D_t$  nicht frei gewählt werden.

Außerdem benötigen wir ein Wegewahlmodell, in das die Parameter  $\alpha = (O, D)$  eingehen:  $G(F, \alpha) = \delta$  bzw.  $G(F, (O, D)) = \delta$  oder explizit:

$$\theta^t c(F_\delta(O, D), (O, D)) = \hat{\delta}$$

$$\hat{F}_\delta(O, D) - \hat{N}(O, D) = \theta.$$

Dabei entsteht  $\hat{N}(O, D)$  aus  $N(O, D)$  durch Streichen der jeweils zu  $seO$  gehörigen Komponenten. Implizit ist somit die Abbildung:

$$A \rightarrow \mathcal{F}_p$$

$$(O, D) \rightarrow F_\delta(O, D)$$

gegeben.

Sei  $m \in \mathbb{R}^I$ ,  $I \in B$ , der Vektor der Zählwerte.

Wir möchten die Quell- und/oder Zielstärken  $(O, D) \in A$  so ermitteln, daß  $m$  "möglichst gut" durch errechnete Flußwerte  $F = F(O, D) \in \mathcal{F}_p$  bzw.

$f(O,D) = \Delta^{BP} F(O,D) \in \mathbb{R}_+^B$  approximiert wird, d.h. wir suchen nach einer Lösung der Optimierungsaufgabe  $P(\delta)$  für  $\delta=0$ . Es gilt also für  $P(\delta)$ :

$$(III.3.1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(O,D) \in A} \overline{\sum_{i \in I}} (f_i(O,D) - m_i)^2 \\ \theta^t c(F_\delta(O,D), (O,D)) = \hat{\theta} \\ \hat{\Gamma} F(O,D) - \hat{N}(O,D) = \theta \\ f(O,D) = \Delta^{BP} F_\delta(O,D) \\ O \geq 0, D \geq 0 \end{array} \right.$$

Wir bezeichnen mit

$$\frac{dF_\delta}{d(O,D)} := \left[ \frac{dF_\delta}{dO}, \frac{dF_\delta}{dD} \right].$$

Analog definiert man  $\frac{dN}{d(O,D)}$ .

Bei den gebräuchlichen Verteilungsmodellen ist (wie schon oben erwähnt) aus Gründen der Koppelung der Quell- und Zielstärken über die Gleichung  $\overline{\sum_{s \in O}} O_s = \overline{\sum_{t \in D}} D_t$  eine der Variablen  $O_s$  bzw.  $D_t$  zu eliminieren. Entsprechend sind dann auch die Ableitungen  $\frac{dF}{d(O,D)}$  bzw.  $\frac{dN}{d(O,D)}$  zu reduzieren. Wir bezeichnen die so reduzierten Ableitungen wiederum mit  $\frac{dF}{d(O,D)}$  bzw.  $\frac{dN}{d(O,D)}$ .

Es gilt dann:

$$(III.3.2) \quad \frac{dF_\delta}{d(O,D)} = \frac{\partial F_\delta}{\partial N} \frac{dN}{d(O,D)}$$

Somit ergibt sich  $\frac{dF_\delta}{d(O,D)}$  als Produkt der Matrix der Ableitungen von  $F_\delta(O,D)$  nach  $N$  und der Matrix der Ableitungen von  $N(O,D)$  nach  $(O,D)$ .

Wir wollen nun einige Beispiele angeben, bei denen die Berechnung dieser Ableitungen besonders einfach ist.

### Verteilungsmodelle

Funktionen, die bei fest vorgegebenen Quell- und/oder Zielstärken  $O$  bzw.  $D$  Nachfragen  $N(O,D)$  berechnen, nennt man Verteilungs- oder auch Allokationsmodelle. Derartige Modelle wurden in der Vergangenheit von einer Vielzahl von Autoren analysiert; stellvertretend seien hier nur FISCHER [45] und WILSON [52] genannt. Für die hier dargestellte Problematik eignen sich besonders solche Modelle, die eine möglichst einfache Berechnung der Ableitung  $\frac{dN(O,D)}{d(O,D)}$  zulassen. Beispielsweise liefern Verteilungsmodelle, in die entweder nur Quell- oder nur Zielstärken eingehen, wie die Ansätze vom Typ

$$(III.3.3) \quad N_{ij} = \frac{O_i \cdot w_{ij}}{\sum_{k \in D} w_{ik}} \quad \text{bzw.}$$

$$(III.3.4) \quad N_{ij} = \frac{D_j \cdot w_{ij}}{\sum_{l \in O} w_{lj}}$$

$$(w_{st} > 0 \text{ für alle } (s,t) \in W)$$

die einfachen Ableitungen

$$(III.3.5) \quad \begin{aligned} \frac{dN_{ij}}{dO_i} &= \delta_{il} \frac{N_{ij}}{O_i} \quad \text{bzw.} \\ \frac{dN_{ij}}{dD_k} &= \delta_{jk} \frac{N_{ij}}{D_k} \end{aligned}$$

wobei  $\delta_{uv} = 1$  für  $u=v$  und  $\delta_{uv} = 0$  für  $u \neq v$ .

Die Faktoren  $w_{st}$  in (III.3.3) und (III.3.4) sind meist Funktionen des "Widerstandes" zwischen den Zonen  $s$  und  $t$ ; häufig gilt:

$$w_{st} = e^{-\beta \tilde{t}_{st}},$$

wobei  $\tilde{t}_{st}$  die Reisezeit von  $s$  nach  $t$  bezeichnet und  $\beta \in \mathbb{R}_+$  einen empirischen Parameter, der für die Zwecke der Fahrtenmatrixbestimmung als bekannt angenommen wird.

Will man mit dem Ansatz (III.3.1) nur Quellstärken oder nur Zielstärken abschätzen und legt man jeweils eines der entsprechenden Verteilungsmodelle (III.3.3) bzw. (III.3.4) zugrunde, dann lassen sich die Ableitungen  $\frac{dN}{d\alpha}$  bzw.  $\frac{dN}{d\beta}$  sehr einfach nach den Formeln (III.3.5) berechnen. Willen jedoch mit (III.3.1) Quell- und Zielstärken gleichzeitig variiert werden, dann ist, bei Verwendung der üblichen Verteilungsmodelle (etwa aller zweiseitig restringierten), die Berechnung der Ableitungen  $\frac{dN}{d(\alpha, \beta)}$  sehr aufwendig. Aufbauend auf den Ansätzen (III.3.3) und (III.3.4) geben wir nun ein "Quasiverteilungsmodell"  $\tilde{N}_{ij}(\alpha, \beta)$  an, das mit den Parametern  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^O \times \mathbb{R}^D$  indirekt auch Quell- und Zielstärken beeinflusst. Es gelte für  $(i, j) \in W$ :

$$(III.3.6) \quad \tilde{N}_{ij}(\alpha, \beta) := \tilde{N}_{ij}(\theta, \theta) + \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{O}_i(\theta, \theta)} \alpha_i + \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{D}_j(\theta, \theta)} \beta_j,$$

wobei  $\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)$  eine vorgegebene Fahrtenmatrix mit den Quellstärken  $\tilde{O}_i(\theta, \theta) (>0)$  und den Zielstärken  $\tilde{D}_j(\theta, \theta) (>0)$  ist. Aus (III.3.6) folgt:

$$(III.3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{O}_i(\alpha, \beta) &= \tilde{O}_i(\theta, \theta) + \alpha_i + \sum_{j \in D} \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{D}_j(\theta, \theta)} \beta_j \text{ und} \\ \tilde{D}_j(\alpha, \beta) &= \tilde{D}_j(\theta, \theta) + \beta_j + \sum_{i \in O} \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{O}_i(\theta, \theta)} \alpha_i. \end{aligned}$$

außerdem gilt:  $\frac{d\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{d\alpha_i} = \delta_{il} \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{O}_l(\theta, \theta)}$  und  $\frac{d\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{d\beta_k} = \delta_{jk} \frac{\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)}{\tilde{D}_k(\theta, \theta)}$ .

Bei festem  $\alpha$  bzw.  $\beta$  liefert also (III.3.6) die gleichen Ableitungen wie die Ansätze (III.3.3) bzw. (III.3.4). Die Berechnungen des Abschnittes III.3.4 wurden versuchsweise mit dem Ansatz (III.3.6) durchgeführt, wobei die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  anhand von Verkehrszählwerten geschätzt wurden und eine auf einer Haushaltsbefragung basierende Fahrtenmatrix  $\tilde{N}_{ij}(\theta, \theta)$  zugrunde lag.

### Das Gleichgewichtswegewahlmodell

Wir wollen nun auch für die Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial N}$  unter vereinfachenden Annahmen eine Berechnungsformel herleiten.

(III.3.8) SATZ:

*Es gelten die eingeführten Bezeichnungen. Sei  $\epsilon > 0$  gegeben.*

*Für alle  $w \in W$  und alle  $p, q \in P_w$  gelte:*

$$(III.3.9) \quad \left| \frac{d\bar{k}_p}{d(O,D)} - \frac{d\bar{k}_q}{d(O,D)} \right| < \epsilon.$$

*Dann gilt für  $l \in O$  und  $k \in D$ :*

$$(III.3.10) \quad \left| \frac{dF_p}{dO_l} - \frac{F_p}{N_{ij}} \frac{dN_{ij}}{dO_l} \right| < \frac{\epsilon}{\sigma(s)} F_p \text{ und}$$

$$(III.3.11) \quad \left| \frac{dF_p}{dD_k} - \frac{F_p}{N_{ij}} \frac{dN_{ij}}{dD_k} \right| < \frac{\epsilon}{\sigma(s)} F_p$$

*für  $p \in P_{ij}$ .*

Satz (III.3.8) besagt: Werden die Wegkosten eines Quell-Ziel-Paares bei Änderung der Quell- und Zielstärken etwa in "gleicher Weise" beeinflusst, dann gelten für die Ableitungen  $\frac{dF}{d(O,D)}$  näherungsweise die Formeln (III.3.10) und (III.3.11).

#### Beweis:

Wir nehmen an, daß das Gleichgewichtsproblem  $G(F, \alpha) = \delta$  in die Form  $\hat{G}(F, \alpha) = \theta$  mit den Kostenfunktionen  $\hat{k} = \bar{k} - \gamma$  (für geeignet definiertes  $\gamma$ ) gebracht ist. Dann gilt für  $p \in P_{ij}$ :

$$F_p(O, D) = \frac{N_{ij}(O, D)}{\sum_{q \in P_{ij}} \exp\left\{ \frac{1}{\alpha(s)} [\hat{k}_p(F(O, D)) - \hat{k}_q(F(O, D))] \right\}^{(*)}}$$

Wir bezeichnen den Nenner obiger Formel kurz mit  $\hat{\Sigma}$ .

\*) Die Kostenfunktionen  $k_a(f, \alpha)$  hängen in diesem Fall nicht explizit von  $\alpha$  ab, d.h.  $k_a(f, \alpha) = k_a(f)$ !

Es gilt dann:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{F_P}{N_{ij}}$$

Für leo gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dF_P}{d\sigma_1} &= \frac{\frac{dN_{ij}}{d\sigma_1} - N_{ij} \frac{1}{\sigma(s)} \frac{1}{q} \left( \frac{d\hat{k}_P}{d(O,D)} - \frac{d\hat{k}_Q}{d(O,D)} \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sigma(s)} (\hat{k}_P - \hat{k}_Q) \right\}}{\left( \frac{1}{q} \right)^2} = \\ &= \frac{F_P}{N_{ij}} \frac{dN_{ij}}{d\sigma_1} - \frac{N_{ij}}{\left( \frac{1}{q} \right)^2} \frac{1}{\sigma(s)} \frac{1}{q} \left( \frac{d\hat{k}_P}{d(O,D)} - \frac{d\hat{k}_Q}{d(O,D)} \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sigma(s)} (\hat{k}_P - \hat{k}_Q) \right\} . \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{dF_P}{d\sigma_1} - \frac{F_P}{N_{ij}} \frac{dN_{ij}}{d\sigma_1} \right| < \frac{\varepsilon}{\sigma(s)} F_P .$$

Ähnlich zeigt man (III.3.11).

Unter den Voraussetzungen des Satzes (III.3.9) (für die Parameter  $(\alpha, \beta)$  statt  $(O, D)$ ) mit  $\varepsilon = \emptyset$  und dem "Quasiverteilungsmodell"

$\tilde{N}_{ij}(\alpha, \beta)$  (III.3.6) ergeben sich dann folgende Formeln für die Ableitung  $\frac{dF}{d(\alpha, \beta)}$  :

$$(III.3.12) \quad \frac{dF_P}{d\alpha_1} = \begin{cases} \frac{F_P}{\tilde{O}_1(\theta, \theta)} , & \text{pep}_{1j}, \text{ jed} \\ \emptyset , & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\frac{dF_P}{d\beta_k} = \begin{cases} \frac{F_P}{\tilde{D}_k(\theta, \theta)} , & \text{pep}_{ik}, \text{ ieo} \\ \emptyset , & \text{sonst} \end{cases} .$$

Diese Formeln lassen sich auch in großen Netzen einfach berechnen.

### III.3.3 Ein Algorithmus zur Korrektur der Quell- und Zielstärken

Auf der Basis des Algorithmus (II.3.15) läßt sich nun ein Verfahren zur Korrektur der Nachfragebeziehungen  $N = N(O, D)$  angeben. Es gelten die bisher eingeführten Bezeichnungen:

#### (III.3.13) ALGORITHMUS:

Sei  $\Omega \subset A$  die Lösungsmenge von  $\hat{P}(\theta)$ .

(0) Bestimme Startlösung  $(F^{(0)}, (O^{(0)}, D^{(0)}), \delta^{(0)}) \in \mathcal{F}_P \times A \times L$  mit

$$G(F^{(0)}, (O^{(0)}, D^{(0)})) = \delta^{(0)}$$

$$F^{(0)} = F_{\delta^{(0)}}(O^{(0)}, D^{(0)}), \quad N^{(0)} := N(O^{(0)}, D^{(0)})$$

Ist  $(O^{(0)}, D^{(0)}) \in \Omega$  und  $\delta^{(0)} = \theta$ , dann STOP.

Sonst  $i := 0$ , gehe zu (1).

(1) Beschreibung des Unteralgorithmus V:

$$\text{Berechne } d^{(i)} := \frac{d\bar{Z}(O^{(i)}, D^{(i)})}{df} \cdot \frac{df_{\delta^{(i)}}(O^{(i)}, D^{(i)})}{d(O, D)}$$

Bestimme geeignete Schrittweite  $\tau^{(i)} \in \mathbb{R}$  und setze

$$(O^{(i+1)}, D^{(i+1)}) := (O^{(i)}, D^{(i)}) + \tau^{(i)} d^{(i)} \quad \text{und}$$

$$N^{(i+1)} := N(O^{(i+1)}, D^{(i+1)}).$$

(2) Beschreibung des Unteralgorithmus S:

Bestimme mit der Nachfrage  $N^{(i+1)}$  nun  $F^{(i+1)}$  und  $\delta^{(i+1)}$  durch

$$G(F^{(i+1)}, (O^{(i+1)}, D^{(i+1)})) = \delta^{(i+1)}$$

$$\text{mit } \|\delta^{(i+1)}\| \leq \|\delta^{(i)}\|.$$

(3) Ist  $(O^{(i+1)}, D^{(i+1)}) \in \Omega$  und  $\delta^{(i+1)} = \theta$ , dann STOP.

Sonst  $i := i+1$ , gehe zu (1).

Algorithmus (III.3.13) ist für jedes Verteilungsmodell  $N(O,D)$  geeignet und konvergiert gegen einen Punkt aus  $\Omega$ , wenn die Voraussetzungen des allgemeinen Konvergenzsatzes (II.3.7) erfüllt sind.

Ohne weitergehende Konvergenzuntersuchungen geben wir im folgenden eine Modifikation des Schrittes (III.3.13)(1) an und verwenden als Beispiel das "Quasiverteilungsmodell"  $\tilde{N}_{ij}(\alpha, \beta)$  aus (III.3.6) und die Ableitungsformeln (III.3.12). Es ist dann möglich, Abstiegsrichtung und Schrittweite gleichzeitig zu bestimmen. Im  $i$ -ten Iterationsschritt von (III.3.13)(1) gelten gemäß (III.3.6) und (III.3.7) folgende Beziehungen für  $(k,l) \in \omega$ :

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{kl}(\theta, \theta) &= N_{kl}^{(i)}, \quad \tilde{O}_k(\theta, \theta) = O_k^{(i)}, \quad \tilde{D}_l(\theta, \theta) = D_l^{(i)}; \\ \tau d_k^{(i)} &= \alpha_k + \frac{\tilde{N}_{kj}(\theta, \theta)}{\sum_{j \in D} \tilde{D}_j(\theta, \theta)} \beta_j; \quad \tau d_l^{(i)} = \beta_l + \frac{\tilde{N}_{il}(\theta, \theta)}{\sum_{i \in O} \tilde{O}_i(\theta, \theta)} \alpha_i; \\ N_{kl}^{(i+1)} &= \tilde{N}_{kl}(\alpha, \beta), \quad O_k^{(i+1)} = \tilde{O}_k(\alpha, \beta), \quad D_l^{(i+1)} = \tilde{D}_l(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Die erwähnte Modifikation besteht nun darin, daß  $\alpha$  und  $\beta$  als Lösung des folgenden Optimierungsproblems bestimmt werden:

$$(III.3.14) \quad \min_{(\alpha', \beta')} \bar{z}^2(f_\delta^L(\alpha', \beta'))$$

unter den Restriktionen

$$(III.3.15) \quad \begin{aligned}|\alpha'_k| &\leq r \cdot \tilde{O}_k(\theta, \theta) \quad (k \in O) \text{ und} \\ |\beta'_l| &\leq r \cdot \tilde{D}_l(\theta, \theta) \quad (l \in D),\end{aligned}$$

wobei  $r > 0$  und

$$f_\delta^L(\alpha', \beta') := f_\delta(\theta, \theta) + \frac{df_\delta(\theta, \theta)}{d(\alpha, \beta)} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

die Linearisierung von  $f_\delta = \Delta F_\delta$  bzgl.  $\alpha$  und  $\beta$  im Punkt  $(\theta, \theta)$  ist, und  $\frac{df_\delta}{d(\alpha, \beta)}$  gemäß (III.3.12) ermittelt wird.

Für genügend kleines  $r > 0$  sichern die Restriktionen (III.3.15) die Zulässigkeit des neuen Iterationspunktes  $(O^{(i+1)}, D^{(i+1)})$ , wie man sich leicht überzeugt.

Bringt man die Restriktionen (III.3.15) als Strafterme in die Zielfunktion von (III.3.14) ein, so kann das Optimierungsproblem (III.3.14) durch einen Straffunktionsansatz (siehe ZANGWILL [72]) der Form

$$(III.3.16) \quad \min_{(\alpha, \beta)} \left\| \begin{bmatrix} m_I - f_I(\theta, \hat{\theta}) \\ \text{or } \tilde{O} \\ \text{or } \tilde{O} \\ \text{or } \tilde{D} \\ \text{or } \tilde{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{df_I(\theta, \theta)}{d\alpha}, \frac{df_I(\theta, \theta)}{d\beta} \\ \rho E_O \quad \sigma \\ \rho E_O \quad \sigma \\ \sigma \quad \rho E_D \\ \sigma \quad \rho E_D \end{bmatrix} \right\|_2^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

ersetzt werden,  $f_I = (f_\delta)_I$  ( $\rho > 0$  genügend groß).  $E_O$  bzw.  $E_D$  sind  $(O \times O)$ -bzw.  $(D \times D)$ -Einheitsmatrizen. Die Systemmatrix von (III.3.16) ist immer spaltenregulär, so daß zur Lösung von (III.3.16) die Gauß'sche Fehlerquadratmethode (siehe SCHWARZ et al. [70]) herangezogen werden kann. Wenn  $\frac{dF}{d(\alpha, \beta)}$  wie in (III.3.12) ermittelt wird, ist die Erstellung von (III.3.16) sehr einfach.

Abschließend sei noch bemerkt, daß im Ansatz (III.3.1) neben den Vorzeichenbedingungen  $O \geq 0$ ,  $D \geq 0$  noch weitere Restriktionen für die Parameter  $O$  und  $D$  stehen könnten, etwa Gleichungen, die die Quell- und Zielstärken mit entsprechenden Strukturmerkmalen der zugehörigen Zonen verknüpfen.

### III.3.4 Ergebnisse der Matrixanpassung

Algorithmus (III.3.13) wurde mit den anschließend erläuterten Modifikationen am Dreifachprozessor TR 440 des Regionalen Rechenzentrums Erlangen implementiert und auf Daten der Stadt Erlangen angewandt. Eine Beschreibung dieser Daten findet sich im Anhang IV.1. Der in (III.3.13) zugrunde gelegte Wegewahlalgorithmus war vom Typ ALGS, wie er in III.2.4 beschrieben wurde. Dabei war für alle  $s \in O$   $\sigma(s)=30$ .

Wie aus Tabelle 6 zu entnehmen ist, konnte der gewichtete Fehler  $E_{\emptyset}^G$  um 9 % verbessert werden. Insgesamt wurden zur alten Matrix 7413 Fahrten hinzugefügt. Im ersten Schritt addierte Algorithmus (III.3.13) bereits 3458 Fahrten hinzu. Nach 10 Algorithmusschritten wurden nur noch 282 Fahrten hinzuaddiert, so daß an dieser Stelle das Verfahren abgebrochen wurde.

|             | Verteilungs-<br>fehler $V$ | gewichteter<br>Fehler $E_{\emptyset}^G$ |
|-------------|----------------------------|-----------------------------------------|
| Alte Matrix | 3 %                        | 29 %                                    |
| Neue Matrix | 2 %                        | 20 %                                    |

\*)

Tabelle 6: Korrektur der Fahrtenmatrix

\*)  $V$  und  $E_{\emptyset}^G$  sind in IV.1 definiert.

## Kapitel IV ,Anhang =====

### IV. 1 Kurzbeschreibung der Testdaten der Stadt Erlangen

Alle in dieser Arbeit angegebenen Ergebnisse beziehen sich auf Daten der Stadt Erlangen, die im Rahmen des Generalverkehrsplans für das Jahr 1974 erhoben wurden.

Erlangen war 1974 eine Stadt mit ca. 100.000 Einwohnern. Die größte Ausdehnung beträgt in der Länge ca. 11 km, in der Breite ca. 8 km.

Die eingehende Fahrtenmatrix (= Nachfragen zwischen den einzelnen Quell-Ziel-Paaren) wurde anhand einer Haushaltsbefragung mittels einer 20 %-Stichprobe erstellt. Bei allen hier angegebenen Untersuchungen lag eine Fahrtenmatrix für den Zeitraum 15.00 - 19.00 Uhr eines repräsentativen Wochentages des Jahres 1974 zugrunde, mit einem Verkehrsaufkommen von ca. 60.000 Fahrten.

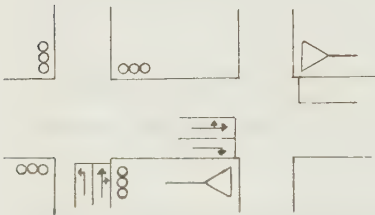
Das Untersuchungsgebiet wurde in 68 Zonen (einschließlich der äußeren Anbindungen) unterteilt und lieferte bei der oben erwähnten Fahrtenmatrix 2960 Quell-Ziel-Paare mit positiver Nachfrage.

Das Individualverkehrsnetz wurde durch 358 Kreuzungen (davon 140 Zonenanbindungsknoten) mit 1089 zugeordneten Strecken erfaßt. Bei streckenorientierten \*) rechnerinternen Darstellungen ergab dies 1226 Knoten mit 2518 Bogen.

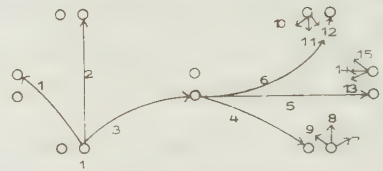
Als Vergleichsdaten lagen Querschnitts- und Knotenstromzählungen an 184 Zählstellen mit bis zu 5 Zählwerten vor, die zwischen Sommer 1974 und Sommer 1975 ermittelt wurden.

\*) siehe z.B. BRAUN/WERMUTH [40]

Bei der streckenorientierten Darstellung des Netzes repräsentierten (interne) Knoten die realen "Fahrbahnen" (2 Fahrbahnen pro Straße) und die (internen) Bogen die aus jeder Fahrbahn möglichen Abbiegevorgänge (siehe Abbildung 10).



Reales Netz



Interne Darstellung (nicht alle Bogen eingetragen)

Abbildung 10: Netzcodierung

Pro Bogen (= Abbiegevorgang) sind die Kostenfunktionen  $k_a(f)$  definiert mit

$$k_a(f) = u_a(f) \cdot s_a(f) + d_a ,$$

wobei  $d_a$  die Fahrzeit für das Durchfahren des Knotens (= Fahrbahn) ist, in der der Bogen  $a$  beginnt, z.B.  $d_2$  = Fahrzeit für Knoten 1.

$u_a(f) := \exp(\beta \varphi_a(f))$  soll an unsignalisierten Kreuzungen die Beeinträchtigung des nicht bevorrechtigten Verkehrs durch vorfahrtsberechtigten Verkehr widerspiegeln ( $\beta \neq 0$ ). Wenn  $a$  ein Abbiegevorgang an einer signalisierten Kreuzung bezeichnet, so ist  $\beta = 0$  (vgl. III.2).

$\varphi_a(f)$  ist die Summe aller Abbiegevorgänge, die den bevorrechtigten Verkehr darstellen, z.B. bezeichnet  $a=6$  einen Abbiegevorgang an einer nichtsignalisierten Kreuzung, der die Vorfahrt achten muß. Dann ist  $\varphi_6 = \sum_{i=7}^{12} f_i$ .

$s_a(f) = v_a \left( \frac{\hat{s}_a(f)}{K_a} \right)^n + w_a$  gibt die Wartezeit an, die entsteht, wenn man nur die gegenseitige Beeinträchtigung der wartenden Fahrzeuge in der Warteschlange berücksichtigt. (Dieser Effekt tritt sowohl bei signalisierten als auch bei unsignalisierten Kreuzungen auf.) Speziell wurde hier berücksichtigt, daß sich Abbiegevorgänge, die aus einer Spur erfolgen (z.B. für  $a$  gleich 2 und 3, aber auch für  $a$  gleich 13, 14 und 15), sich gegenseitig in ihrer Wartezeit beeinflussen, weil die Wartenden der jeweiligen Abbiegevorgänge in der gleichen Spur warten müssen. Deshalb ist  $\hat{s}_a(f)$  nicht immer gleich  $f_a$ , sondern gleich der Summe der Abbiegebelastungen, die aus einer Spur erfolgen, z.B.

$$\hat{s}_2(f) = \hat{s}_3(f) = f_2 + f_3 \text{ oder}$$

$$\hat{s}_{13}(f) = \hat{s}_{14}(f) = \hat{s}_{15}(f) = f_{13} + f_{14} + f_{15}$$

Die Größe  $K_a$  gibt jeweils die Kapazität derjenigen Spur an, aus der der zu  $a$  gehörige Abbiegevorgang erfolgt.

$v_a$ ,  $w_a$  und  $n$  sind zu bestimmende Parameter.

Insbesondere erkennt man, daß bei konstantem  $u_a(f)=u_a$  die Jacobi-matrix  $\frac{\partial k}{\partial f}$  wegen der Eigenschaften von  $s_a(f)$  symmetrisch ist.

Von den 2518 Bogen waren insgesamt 814 Bogen lastabhängig, d.h. es galt  $s_a(f) \neq \emptyset$ . Diese Bogen repräsentierten Abbiegevorgänge an sog. "kritischen" signalisierten und unsignalisierten Kreuzungen und an allen Zählstellen. Wesentlich bei dem zugrundeliegenden

Modell war die Annahme, daß die Lastabhängigkeit auf Knoten (= Fahr-  
bahnen) vernachlässigbar ist gegenüber der Lastabhängigkeit der  
Bogen (= Abbiegevorgänge).

### Gütekriterien:

Um die errechneten Werte mit den gezählten vergleichen zu können,  
wurden u.a. folgende Gütekriterien verwendet:

$$E^G := \frac{\sum_{i=1}^n |d_i|}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{n}{M} \frac{\sum_{i=1}^n m_i |d_i|}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

ist der gewichtete Fehler, wobei

$n$  die Anzahl der Zählstellen

$m_i$  der Mittelwert der Zählungen an der Stelle  $i$

$d_i = f_i - m_i$  der Fehler an der Stelle  $i$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

$E_{\emptyset}^G = E^G$  ist der gewichtete Fehler, bei dem alle Zählstellen berück-  
sichtigt wurden.

$E_{800}^G$  ist der gewichtete Fehler, bei dem alle Zählstellen  $i$  mit  
 $m_i > 800$  eingehen, also

$$E_{800}^G = \frac{n}{\sum_{i=1}^n m_i} \frac{\sum_{i=1}^n m_i |d_i|}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Als quadratische Zielfunktion  $Z^2$  bezeichnen wir

$$Z^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2$$

Da pro Zählstelle zum Teil bis zu fünf Zählwerte vorlagen, konnte unter Berücksichtigung der Zählwertstreuung das Gütemaß E definiert werden:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|d_i|}{\sqrt{s_i^2}}$$

wobei  $s_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{m}_j - m_j)^2$  mit

$n_i$  = Anzahl der Zählwerte an der Stelle i

$\bar{m}_i$  = Mittelwert der Zählwerte.

Ist  $E \sim 1$ , so würde man sagen, das Modell ist "gut angepaßt".

Als Gütekriterium für die verwendeten Gleichgewichtsalgorithmen ALGS und ALGU diene der Verteilungsfehler V, der für Weggraphen wie folgt definiert ist:

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{w \in W} \sum_{p \in P} |F_p - \phi_p(F, z)|}{\sum_{w \in W} N_w} \right\}$$

wobei  $\phi_p$  wie in (I.2.11) definiert ist und  $N_w$  die Nachfrage des Quell-Ziel-Paares  $w \in W$  ist. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  bringt zum Ausdruck, daß positive Fehler ( $F_p - \phi_p$ ) in der einen Komponente zu negativen Fehlern bei anderen Komponenten führen und deshalb (ähnlich wie in Verteilungsmodellen) der kumulierte Fehler zu halbieren ist.

## IV.2 LITERATURVERZEICHNIS

### A. Literatur zu Gleichgewichtswegewahlmodellen mit konstanter Nachfrage

- [1] BRAESS, D.; "A Computational Method for the Nonlinear Transportation Problem", Operations Research Verfahren, XVI, pp. 57 - 67, Verlag Anton Hain, 1972
- [2] BRAESS, D.; "Anregungen aus dem Schnittebenenverfahren für die Lösung des allgemeinen Transportproblems", Computing 15, pp. 157 - 167, 1975
- [3] BRUYNNOOGHE, M.; GIBERT, A.; SAKAROVITSCH, M.; "Une Methode d'Affectation du Traffic", Fourth Int. Symp. on the Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, 1968
- [4] DAFERMOS, S.C.; SPARROW, F.T.; "The Traffic Assignment Problem for a General Network", Journal of Research, National Bureau of Standards, Vol. 37 B, No. 2, 1969
- [5] DAFERMOS, S.C.; "An Extended Traffic Assignment Model with Application to Two Way Traffic", Transportation Science 5, pp. 366 - 389, 1971
- [6] DAFERMOS, S.C.; "The Traffic Assignment Problem for Multiclass-User Transportation Network", Transportation Science 6, pp. 73 - 87, 1972
- [7] LEBLANC, L.J.; MORLOK, E.K.; PIERSKALA, W.P.; "An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem", Transportation Research 9, pp. 309 - 318, 1975
- [8] LEVENTHAL, T.; NEMHAUSER, G.; TROTTER, L.; "A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assignment", Transportation Science 7, pp. 168 - 176, 1973
- [9] NGUYEN, S.; "An Algorithm for the Traffic Assignment Problem", Transportation Science 8, pp. 203 - 216, 1974
- [10] PETERSEN, E.R.; "A Primal-Dual Traffic Assignment Algorithm", Management Science 22, pp. 87 - 95, 1975
- [11] WARDROP, J.G.; "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research", Proc. Inst. Civil Engineers, Part II, pp. 325 - 378, 1952
- [12] WILKIE, D.F.; STEFANEK, R.G.; "Precise Determination of Equilibrium in Travel Forecasting Problems Using Numerical Optimization Techniques", Highway Research Record 369, 1971

B. Weiterführende Literatur zu Gleichgewichtswegewahlmodellen

- [13] BECKMANN, M.J.; "Duality in Transportation Problems with Flexible Demand", Operations Research Verfahren VIII, pp. 17 - 21, Verlag Anton Hain, 1970
- [14] BUCKLEY, D.J. ed.; "Transportation and Traffic Theory", Elsevier, 1974
- [15] DAFERMOS, S.C.; "Toll Patterns for Multiclass-User Transportation Networks", Transportation Science 7, pp. 211 - 223, 1973
- [16] DAGANZO, C.F.; "On the Traffic Assignment Problem with Flow Dependent Costs (I + II)", Transportation Research 11, pp. 433 - 441, 1977
- [17] ERLANDER, S.; "Accessibility, Entropy and the Distribution and Assignment of Traffic", Transportation Research 11, pp. 149 - 153, 1977
- [18] EVANS, S.P.; "Derivation and Analysis of some Models for Combining Trip Distribution and Assignment", Transportation Research 10, pp. 37 - 57, 1976
- [19] FERLAND, J.A.; FLORIAN, M.; ACHIM, C.; "On Incremental Methods for Traffic Assignment", Transportation Research 9, pp. 237 - 239, 1975
- [20] FLORIAN, M.A., ed.; "Traffic Equilibrium Methods", Proc. of the Int. Symp. Montréal, 1974
- [21] FLORIAN, M.; NGUYEN, S.; "A Method for Computing Network Equilibrium with Elastic Demand", Transportation Science 8, pp. 321 - 332, 1974
- [22] FLORIAN, M.; NGUYEN, S.; FERLAND, J.; "On the Combinend Distribution-Assignment of Traffic", Transportations Science 9, pp. 43 - 53, 1975
- [23] FLORIAN, M.; NGUYEN, S.; "An Application and Validation of Equilibrium Trip Assignment Methods", Transportation Science 10, pp. 374 - 390, 1976
- [24] FLORIAN, M.; "A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes", Transportation Science 11, pp. 166 - 179, 1977
- [25] FLORIAN, M.; NGUYEN, S.; "A Combined Trip Distribution Modal Split and Trip Assignment Model", Transportation Research 12, pp. 241 - 246, 1978
- [26] JÖRNSTEN, K.O.; NGUYEN, S.; "On the Estimation of a Trip Matrix from Network Data", Publication No. 153 - Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 1979

- [27] MURCHLAND, J.D.; "Braess's Paradox of Traffic Flow", Transportation Research 4, pp. 391 - 394, 1970
- [28] MURCHLAND, J.D.; "Gleichgewichtsverteilung des Verkehrs im Straßennetz", Operations Research Verfahren VIII, pp. 145 - 183, Verlag Anton Hain, 1970
- [29] NETTER, M.; SENDER, J.G.; "Equilibre Offre-Demande et Tarification sur un Réseau de Transport", Rapport de Recherche « Institut de Recherche des Transport » 33, 1970
- [30] NGUYEN, S.; "Estimating an OD Matrix from Network Data: A Network Equilibrium Approach", Publication No. 60 - Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 1977
- [31] NGUYEN, S.; "On the Estimation of an OD Trip Matrix by the Equilibrium Methods using Pseudo Delay Functions", Publication No. 81 - Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, 1978
- [32] ROTHENGATTER, W.; "Ökonomische Beiträge für eine integrierte Verkehrsplanung in Ballungsgebieten", Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe, 1977
- [33] RUITER, R.; "The Prediction of Network Equilibrium - The State of the Art", Transportation System Division of Civil Engineering, M.I.T., paper presented at the International Conference on Transportation Research, Transportations Research Forum, Bruges, 1973
- [34] STEENBRINK, P.A.; "Optimization of Transport Networks", John Wiley, 1974
- [35] TOMLIN, J.A.; "A Mathematical Programming Model for the Combined Distribution-Assignment of Traffic", Transportation Science 5, pp. 122 - 140, 1971
- [36] VLIET, D.v.; "Road Assignment I - III", Transportation Research 10, pp. 137 - 157, 1976
- [37] WIGAN, M.R.; BAMFORD, T.J.G.; "A Perturbation Model for Congested and Overloaded Transportation Networks", Road Research Laboratory Report LR 411, Harmondsworth, England, 1971
- [38] WIGAN, M.R.; "Benefit Assessment for Network Traffic Models Application to Road Pricing", Road Research Laboratory Report LR 417, Crowthorn, Berkshire, 1971
- [39] WILLUMSEN, L.G.; "Estimation of an O-D Matrix from Traffic Counts - A Review", Working Paper 99, Institute for Transport Studies, University of Leeds, 1978

C. Literatur zu übergreifenden Themen

- [40] BRAUN, J.; WERMUTH, M.; "VPS 3, Konzept und Programmsystem eines analytischen Gesamtverkehrsmodells", Schriftenreihe des Instituts für Verkehrsplanung und Verkehrswesen der Technischen Universität München, Heft 6, 1973
- [41] DAGANZO, C.F.; "Some Statistical Problems in Connection with Traffic Assignment", Transportation Research 11, pp. 385 - 389, 1977
- [42] DAGANZO, C.F.; SHEFFI, Y.; "On Stochastic Models of Traffic Assignment", Transportation Science 11, pp. 253 - 274, 1977
- [43] DEJON, B.; "Spatial Interaction Network Flow Models", Proceedings in Operations Research 7, Papers of the Annual Meeting DGOR, pp. 377 - 386, 1977
- [44] DIAL, R.B.; "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration", Transportation Research 5, pp. 83 - 111, 1971
- [45] FISCHER, M.M.; "Eine theoretische und methodische Analyse mathematischer Stadtentwicklungsmodelle vom Lowry-Typ", Waldemar Kramer, Frankfurt/M., 1976
- [46] HAUZINGER, H.; "Ein Verfahren zur Bestimmung der Verteilung des Verkehrs in einem Straßennetz bei verallgemeinert-belastungsabhängigen Reisezeiten", Dissertation, Universität Mannheim, 1973
- [47] HENSEL, H.; "Wörterbuch und Modellsammlung zum Algorithmus der Verkehrsprognose", Berichte des Inst. f. Stadtbauwesen, RWTH, Aachen, B 4, 1976
- [48] MÄCKE, P.A.; "Zur modellmäßigen Beschreibung des aus städtischen regionalen und überregionalen Strukturdaten resultierenden Verkehrs", Schriftenreihe des Inst. f. Stadtbauwesen, RWTH Aachen, 41, 1977
- [49] ROBILLARD, P.; TRAHAN, M.; "Estimating the O-D Matrix from Observed Link Volumes", Transportation Research 9, pp. 123 - 128, 1975
- [50] SIEGLOCH, W.; "Die Leistungsermittlung an Knotenpunkten ohne Lichtsignalsteuerung", Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 154, Bonn, 1973
- [51] UEBERSCHAER, M.; "Die Aufteilung der Verkehrsströme auf verschiedene Fahrtwege (Routen) in Straßennetzen aufgrund der Straßen- und Verkehrsbedingungen beim morgendlichen Berufspendlerverkehr", Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 85, Bonn, 1969
- [52] WILSON, A.G.; "Urban and Regional Models in Geography and Planning", John Wiley, 1974

D. Mathematische Literatur

- [53] BERGE, G.; GHOUILA-HOURI, A.; "Programme, Spiele, Transportnetze", Teubner, 2. Auflage, 1969
- [54] BIGELOW, J.H.; SHAPIRO, N.Z.; "Implicit Function Theorems for Mathematical Programming and for Systems of Inequalities", Mathematical Programming 6, pp. 141 - 156, 1974
- [55] BLUM, E.; OETTLI, W.; "Mathematische Optimierung", Springer, 1975
- [56] COLLATZ, L.; WETTERLING, W.; "Optimierungsaufgaben", Springer, 1971
- [57] COLLATZ, L.; "Funktionalanalysis und numerische Mathematik", Springer, 1968
- [58] DANTZIG, G.B.; FOLKMAN, J.; SHAPIRO, N.; "On the Continuity of the Minimum Set of a Continuous Function", Journal of Mathematical Analysis and Applications 17, pp. 519 - 548, 1967
- [59] DEJON, B.; "A Note on Directional Differentiability of Flow Network Equilibria with Respect to a Parameter", Workshop: Operations Research und Optimierung, Bad Honnef, 1977
- [60] DIXON, L.C.W.; SZEGÖ, G.P.; (ed.); "Towards Global Optimization", Elsevier, 1975
- [61] ERWE, F.; "Differential- und Integralrechnung I + II", Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962
- [62] FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P.; "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", John Wiley, 1968
- [63] FIACCO, A.V.; "Sensitivity Analysis for Nonlinear Programming Using Penalty Methods", Mathematical Programming 10, pp. 287 - 311, 1976
- [64] FORD, L.R.; FULKERSON, D.R.; "Flows in Networks", Princeton, 1962
- [65] GEOFFRION, A.M.; "Generalized Benders Decomposition", Journal of Optimization Theory and Applications 10, pp. 237 - 260, 1972
- [66] IRI, M.; "Network Flow, Transportation and Scheduling", Academic Press, 1969
- [67] LUENBERGER, D.G.; "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, 1973
- [68] POLAK, E.; "On the Use of Models in the Synthesis of Optimization Algorithms", in Differential Games and Related Topics, edited by H.W. Kuhn, G.P. Szegö, pp. 263 - 278, 1971

- [69] POTTS, R.B.; OLIVER, R.M.; "Flows in Transportation Networks",  
Academic Press, 1972
- [70] SCHWARZ, H.R.; RUTISHAUSER, H.; STIEFEL, E.; "Matrizen-Numerik",  
Teubner, 1972
- [71] WERNER, H.; "Praktische Mathematik I", Springer, 1970
- [72] ZANGWILL, W.I.; "Nonlinear Programming: A Unified Approach",  
Prentice-Hall, 1969

#### E. Nachträge

- [73] BRAESS, D.; KOCH, G.; "On the Existence of Equilibria in  
Asymmetrical Multiclass-User Transportation Networks",  
Transportation Science 13, 1979
- [74] FISK, C.; NGUYEN, S.; "Properties of the two mode Equili-  
brium Assignment Model with Flow Dependent Transit Costs",  
Publication No. 121 - Centre de recherche sur les transports,  
Université de Montréal, 1979
- [75] DAFERMOS, S.; "Traffic Equilibrium and Variational  
Inequalities", Transportation Science 14, 1980

### IV.3 Schreibweisen und Bezeichnungen

Ist  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix, dann bezeichnet  $A_{\cdot i}$  die  $i$ -te Spalte und  $A_j$  die  $j$ -te Spalte von  $A$ .

Den Rang von  $A$  bezeichnen wir mit  $\text{Rg } A$ , den Defekt von  $A$  mit  $\text{Def } A$ , den Kern von  $A$  mit  $\text{Ker } A$ , die Transponierte von  $A$  mit  $A^t$  und den Bildraum von  $A$  mit  $\text{Im } A$ .

Ist  $(B_i)_{i \in I}$  eine Folge von Matrizen, dann wird durch  $\text{diag } (B_i)_{i \in I}$  die Blockdiagonalmatrix bezeichnet, die in der Diagonale die Matrizen  $B_i$  enthält und sonst aus Nullblöcken besteht.

Wenn  $A$  eine  $(m \times n_1)$ -Matrix und  $B$  eine  $(m \times n_2)$ -Matrix ist, dann ist  $[A, B]$  die  $(m \times (n_1 + n_2))$ -Matrix, die durch Nebeneinandersetzen von  $A$  und  $B$  entsteht.

Mit  $E$  bezeichnen wir die Einheitsmatrix, deren Ordnung immer aus dem Zusammenhang zu entnehmen ist. Dies gilt auch für die Nullmatrix, die wir mit  $O$  bezeichnen.

Ist  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , dann gilt:  $x_I := (x_a)_{a \in I}$ . Nullvektoren werden durch  $0$  gekennzeichnet; ihre Dimension ist immer aus dem Zusammenhang ersichtlich.

$t_{(\geq)} 0$  bedeutet für  $t \in \mathbb{R}^n$ , daß für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt:  $t_i (\geq) 0$ .

Die Zahl Null wird mit  $0$  bezeichnet. In wenigen Fällen wird dieses Symbol auch für die leere Menge verwendet.

Es wird mit folgenden Teilmengen der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gearbeitet:

$$\mathbb{R}_+ := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_+^* := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\},$$

$$\mathbb{N} := \text{Menge der natürlichen Zahlen und}$$

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Doppelindizes  $(i, j)$  werden vereinfachend  $ij$  geschrieben. Ist  $I$  eine Indexmenge und  $i \in I$  und außerdem  $J(i) \subset I$ . Dann bezeichnet  $(ji)$  das Element  $j \in J(i)$ .

#### IV.4 Liste häufig verwendeter Symbole

| Symbol                                      | Seite  | Symbol                 | Seite  | Symbol                                                          | Seite |
|---------------------------------------------|--------|------------------------|--------|-----------------------------------------------------------------|-------|
| A                                           | 14     | I( $\delta$ )          | 38     | $\bar{Z}$                                                       | 72    |
| B                                           | 1      | K                      | 1      | $\Gamma$                                                        | 1     |
| B(s)                                        | 3      | K(s)                   | 3      | $\Gamma(s)$                                                     | 4     |
| B(O)                                        | 4      | K(O)                   | 4      | $\Gamma(O)$                                                     | 4     |
| c                                           | 15     | k                      | 15     | $\hat{\Gamma}$                                                  | 5     |
| $\tilde{C}$                                 | 14, 15 | $\bar{k}$              | 15     | $\delta = \begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ \theta \end{pmatrix}$ | 39    |
| D                                           | 15     | L                      | 37     | $\Delta^{BO}$                                                   | 11    |
| D( $\delta$ )                               | 38     | L(F, $\alpha$ )        | 21     | $\Delta^{BP}$                                                   | 11    |
| d(F, $\alpha$ )                             | 73     | N                      | 9      | $\Delta^{OP}$                                                   | 11    |
| F                                           | 9      | $\hat{N}$              | 10     | $\Delta$                                                        | 15    |
| $F_{\delta}$                                | 39     | $\mathcal{N}(G', W)$   | 9      | $\Theta$                                                        | 3     |
| f                                           | 11     | O                      | 15     | $\Theta(s)$                                                     | 4     |
| $f_{\delta}$                                | 72     | $P, P_W, P_{st}$       | 2      | $\Theta(O)$                                                     | 4     |
| $\mathcal{F}, \mathcal{F}_O, \mathcal{F}_P$ | 13     | P( $\delta$ )          | 37     | $\Phi$                                                          | 19    |
| $G = (K, B)$                                | 1      | $\hat{P}(\delta)$      | 40     |                                                                 |       |
| G(s)                                        | 3      | Q                      | 76     |                                                                 |       |
| G(O)                                        | 4      | R                      | 37     |                                                                 |       |
| $G(W, G)$                                   | 5      | S(F, $\alpha$ )        | 22     |                                                                 |       |
| $G(W, P)$                                   | 6      | S( $\psi$ )            | 77     |                                                                 |       |
| G'                                          | 15     | T, $\mathcal{T}^{(n)}$ | 15, 16 |                                                                 |       |
| G(F, $\alpha$ )                             | 73     | U(F)                   | 73     |                                                                 |       |
| $\mathcal{G}(T)$                            | 17     | V(F, $\alpha$ )        | 73     |                                                                 |       |
| H(f, $\alpha$ )                             | 22     | W                      | 15     |                                                                 |       |
| H                                           | 76     | Z                      | 37     |                                                                 |       |

Lebenslauf

Am 14. März 1948 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Willy Müller und seiner Ehefrau Emma, geb. Böhm in Bamberg geboren.

Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule und anschließend bis 1967 das Clavius-Gymnasium in Bamberg, wo ich im Jahre 1967 die Reifeprüfung ablegte.

Zwischen 1967 und 1969 leistete ich 14 Monate Wehrdienst in Ebern und 4 Monate Ersatzdienst in Heidelberg ab. Außerdem absolvierte ich von Mai bis August 1969 ein Industriepraktikum bei der Firma Siemens in Erlangen.

Im Wintersemester 1969/70 begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg und legte dort im Juli 1975 die Diplom-Hauptprüfung ab. Meine wissenschaftliche Ausbildung verdanke ich u.a. den Herrn Professoren H. Bauer, B. Dejon, L. Elsner, K. Jacobs, G. Nöbeling und W. Specht.

Von August 1975 bis Juli 1979 arbeitete ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik, Lehrstuhl Prof. Dr. B. Dejon.

Seit August 1979 bin ich bei der Verkehrs-Aktiengesellschaft Nürnberg beschäftigt.



